ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

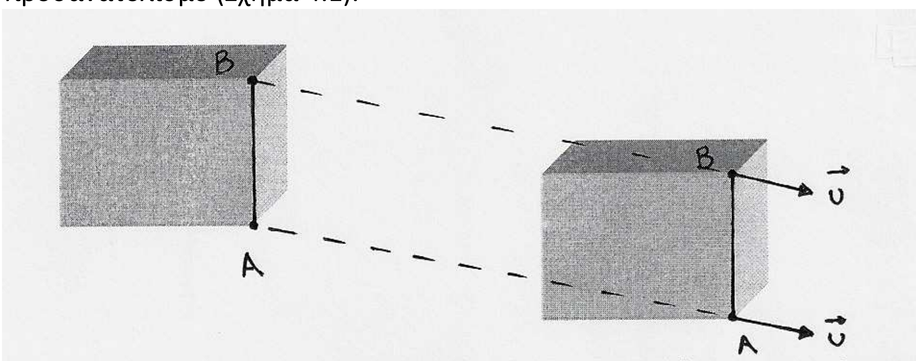
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Υλικό σημείο ή σημειακό αντικείμενο ορίζεται ένα σώμα που έχει όλες τις ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις. Στην πράξη ως υλικό σημείο θεωρούμε κάθε σώμα που έχει διαστάσεις αμελητέες σε σχέση με τις διαστάσεις του περιβάλλοντος χώρου. Κάθε υλικό σημείο αφού δεν έχει διαστάσεις εκτελεί μόνο **μεταφορική κίνηση.**

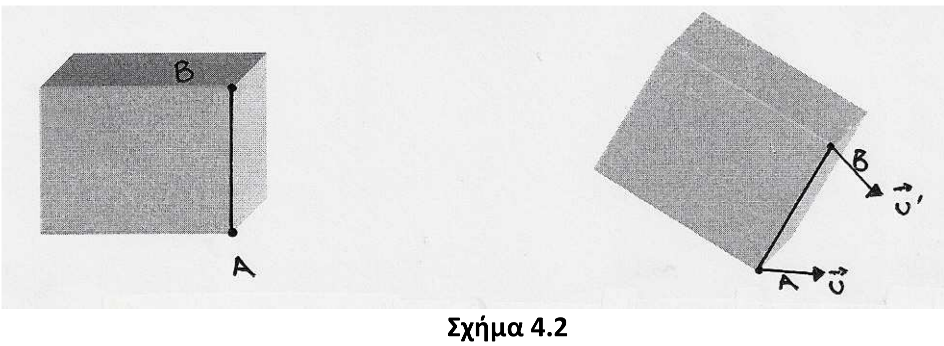
Στερεό σώμα ονομάζουμε ένα σώμα του οποίου τις διαστάσεις δεν μπορούμε να αγνοήσουμε. Τα στερεά σώματα εκτός της μεταφορικής κίνησης που εκτελούν μπορούν να εκτελούν και (**περι)στροφική κίνηση**. Τα στερεά σώματα που δεν παραμορφώνονται όταν δέχονται δυνάμεις ονομάζονται ***μηχανικά στερεά.***

Μεταφορική κίνηση ονομάζουμε την κίνηση ενός στερεού σώματος όταν όλα τα σημεία του έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Επίσης ένα στερεό σώμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, όταν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει ως άκρα του δύο σημεία του στερεού σώματος, σε όλη την διάρκεια της κίνησης δεν αλλάζει προσανατολισμό (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1

Περιστροφική (ή στροφική) κίνηση ονομάζουμε την κίνηση ενός στερεού σώματος όταν τα διαφορετικά σημεία του έχουν διαφορετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (εκτός από ένα σύνολο σημείων που βρίσκονται πάνω στον **άξονα περιστροφής** του στερεού και που έχουν την ίδια ταχύτητα). Επίσης όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί στροφική κίνηση, τότε ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει ως άκρα του δύο σημεία του στερεού σώματος (εκτός των σημείων του άξονα περιστροφής), σε όλη την διάρκεια της κίνησης αλλάζει προσανατολισμό (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2

Όταν ένα σώμα εκτελεί μόνο στροφική κίνηση τότε τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον **άξονα περιστροφής** παραμένουν ακίνητα, ενώ όλα τα άλλα εκτελούν κυκλική κίνηση με κέντρο κάποιο σημείο του άξονα περιστροφής. Όταν ένα σώμα εκτελεί και μεταφορική και στροφική κίνηση τότε λέμε ότι κάνει **σύνθετη κίνηση** και τότε όλα τα σημεία του άξονα περιστροφής έχουν την ίδια ταχύτητα, που όπως θα δούμε στην συνέχεια ονομάζουμε **μεταφορική ταχύτητα.**

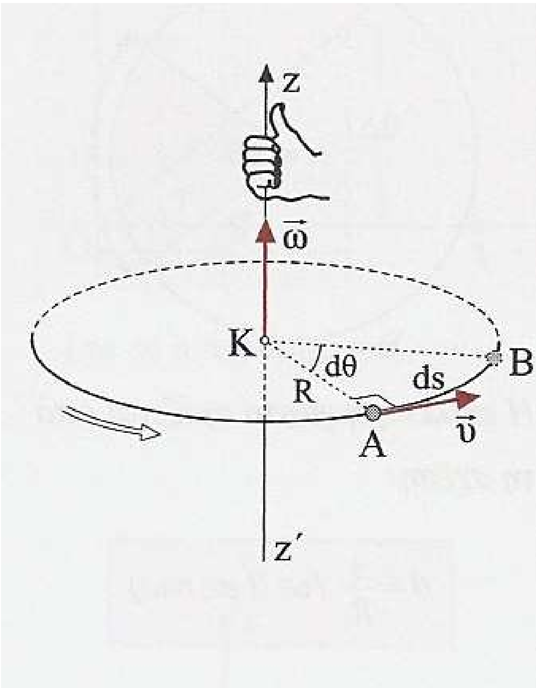
4.2 ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Θα δούμε τώρα τα βασικά κινηματικά μεγέθη που θα συναντήσουμε στην μελέτη της στροφικής κίνησης ενός στερεού.

Αρχικά να θυμηθούμε ότι για ένα σώμα ή υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση ορίζουμε ως ***γωνιακή ταχύτητα*** ($\vec{\omega}$) τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας (γωνιακή μετατόπιση) που διαγράφει η επιβατική ακτίνα (δηλαδή η ακτίνα που συνδέει το κέντρο της τροχιάς με το σώμα):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \quad \text{(μετριέται σε rad/s στο S.I.)} \qquad (4.1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής κίνησης και η φορά της καθορίζεται από την κατεύθυνση του δεξιού χεριού (Σχήμα 4.3).

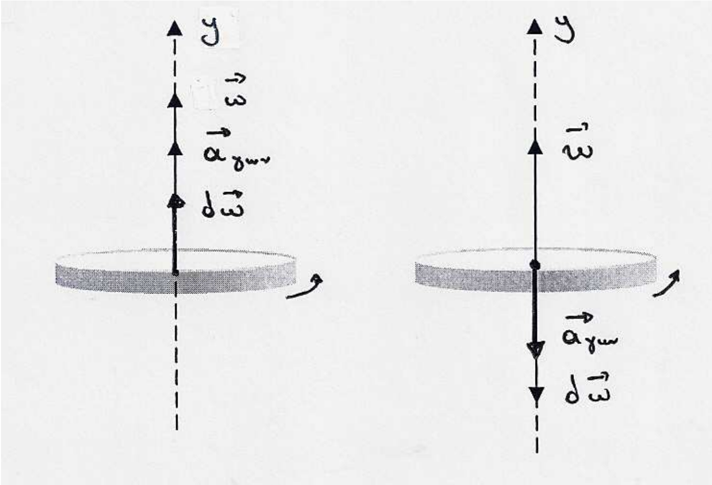


Σχήμα 4.3

Γωνιακή επιτάχυνση ($\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$) ενός σώματος ή υλικού σημείου ορίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας δηλαδή:

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{(μετριέται σε rad/s}^2 \text{ στο S.I.)} \qquad (4.2)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει πάντα την διεύθυνση την γωνιακής ταχύτητας και φορά ομόρροπη αυτής στην επιταχυνόμενη κίνηση και αντίρροπη στην επιβραδυνόμενη (βλέπε σχήμα 4.4, αριστερό σχήμα επιταχυνόμενη και δεξιό επιβραδυνόμενη). Επίσης η γωνιακή επιτάχυνση έχει πάντα την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$.



Σχήμα 4.4

Γραμμική ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$) ορίζουμε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του τόξου που διαγράφει ένα σημείο του στερεού δηλαδή:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad \text{(μετριέται σε m/s στο S.I.)} \qquad (4.3)$$

Η γραμμική ταχύτητα έχει διεύθυνση εφαπτόμενη στην τροχιά της κίνησης (Σχήμα 4.3).

Γραμμική (ή επιτρόχια) επιτάχυνση ($\vec{a}$ ή $\vec{a}_e$) ορίζουμε τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας δηλαδή:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \text{(μετριέται σε m/s}^2\text{ στο S.I.)} \qquad (4.4)$$

Η γραμμική επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας στην επιταχυνόμενη κίνηση και την αντίθετη κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας στην επιβραδυνόμενη κίνηση, ενώ πάντα έχει την ίδια κατεύθυνση με το $d\vec{\upsilon}$.

Γνωρίζουμε ότι (Σχήμα 4.3) όταν η ακτίνα R σε έναν κύκλο διαγράψει γωνία dθ, η μετακίνηση ds του άκρου της (δηλαδή μήκος τόξου) υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{ds=R.d\theta} \qquad (4.5)$$

οπότε:

$$ds = R.d\theta \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\upsilon = \omega.R} \qquad (4.6)$$

Επίσης από την σχέση (4.6):

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.R \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = a_{γων}.R} \qquad (4.7)$$

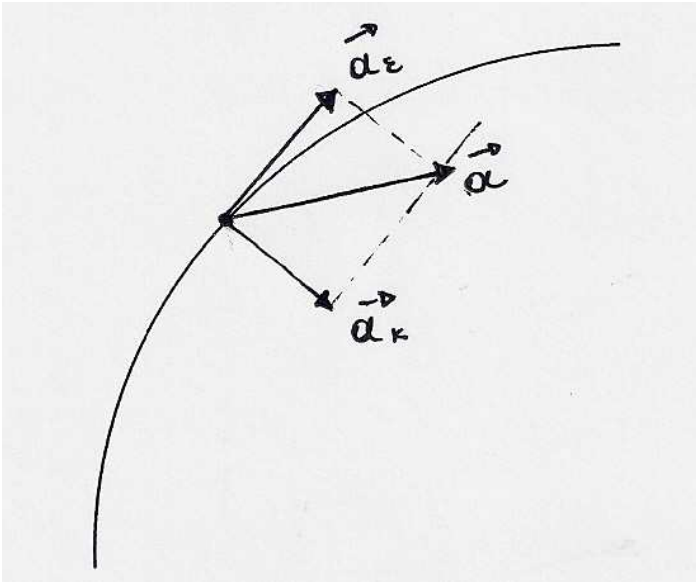
Οι σχέσεις (4.6) και (4.7) είναι οι σχέσεις που συνδέουν τα γωνιακά και τα γραμμικά μεγέθη της στροφικής κίνησης.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Να θυμηθούμε ότι ένα υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση (ή γενικότερα καμπυλόγραμμη κίνηση), έχει επιτάχυνση η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες (Σχήμα 4.5), την επιτρόχια (που δίνεται από την σχέση 4.4) και την κεντρομόλο που δίνεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\kappa} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}^2.\mathbf{R} \qquad (4.8)$$

Η επιτρόχια επιτάχυνση έχει κατεύθυνση εφαπτομενική στην τροχιά και δίνει τον **ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας** ενώ η κεντρομόλος έχει κατεύθυνση ακτινική και δίνει **τον ρυθμό μεταβολής της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας.** Η διανυσματική σύνθεση των δύο αυτών επιταχύνσεων δίνει την συνολική επιτάχυνση $\vec{a}$ του σώματος, η οποία έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της τροχιάς.



Σχήμα 4.5

Επομένως κατά την δυναμική μελέτη της καμπυλόγραμμης κίνησης ενός σώματος, αφού σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που του ασκούνται τις αναλύουμε σε δύο κάθετους άξονες, έναν ακτινικό άξονα κ και έναν εφαπτομενικό άξονα ε και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton σε κάθε άξονα:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\kappa} = \mathbf{m}.\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\kappa} \qquad \text{και} \qquad \sum \vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon} = \mathbf{m}.\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\varepsilon}$$

Α. ΟΜΑΛΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Όταν ένα σώμα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα λέμε ότι κάνει ομαλή στροφική κίνηση οπότε:

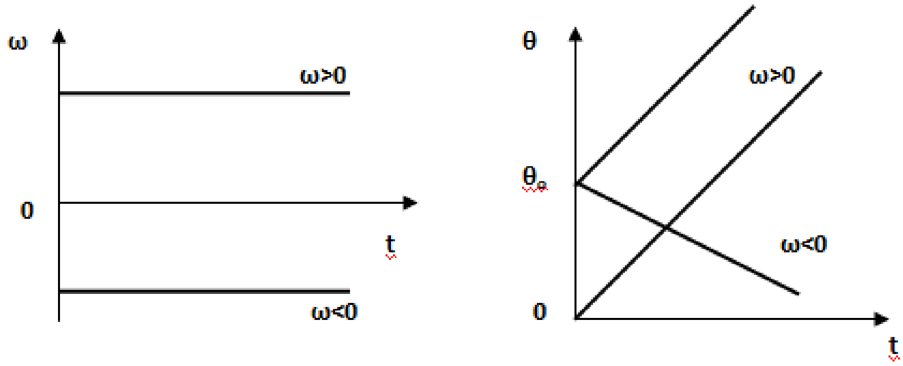
$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\gamma\omega\nu} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (4.9)$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}} \qquad (4.10)$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \Leftrightarrow \omega = \frac{\theta - \theta_o}{t - 0} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_o + \boldsymbol{\omega}.\mathbf{t} \qquad (4.11)$$

Γραφικά θα έχουμε:



Σχήμα 4.6

<u>Β. ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ</u>

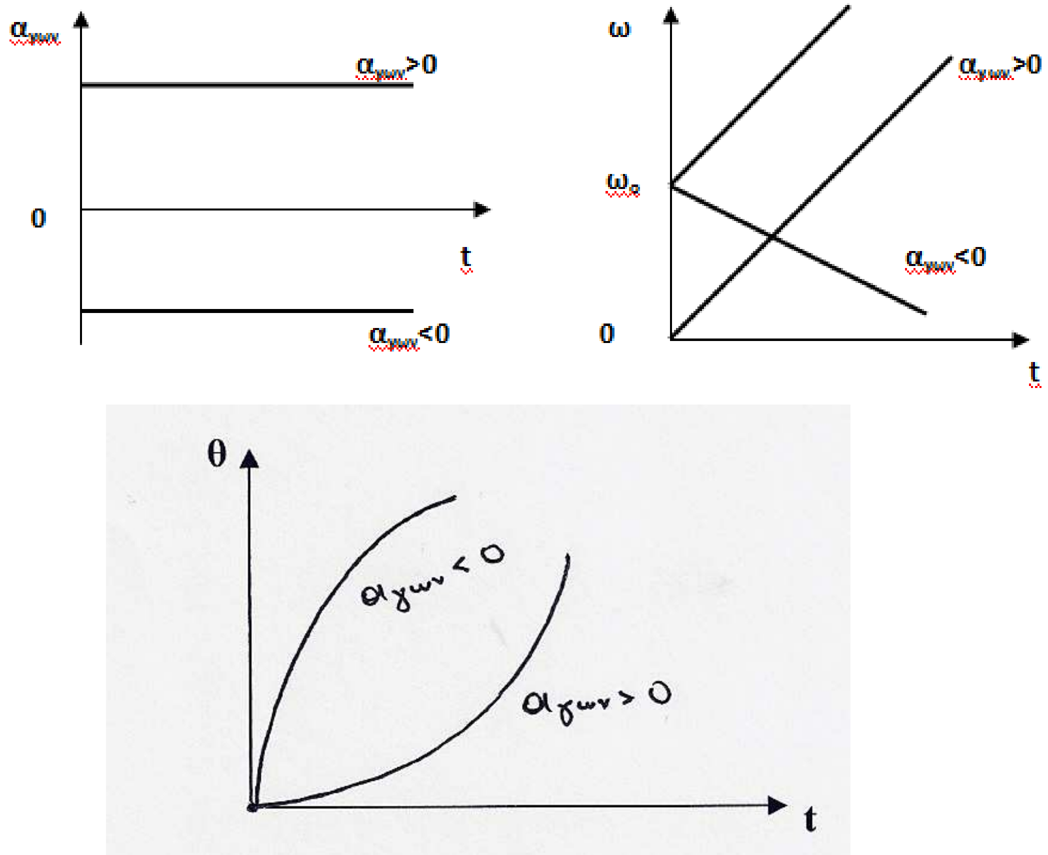
Λέμε ότι κάνει ένα σώμα όταν στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Τότε θα έχουμε:

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \qquad (4.12)$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_o - \omega}{t - 0} \Leftrightarrow \qquad \omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu}.t \qquad (4.13)$$

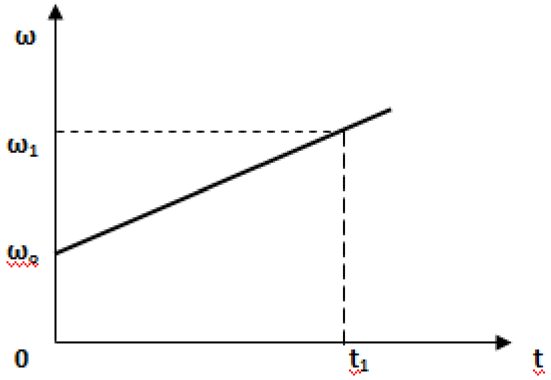
$$\theta = \theta_o + \omega_o.t + \frac{1}{2}.\alpha_{\gamma\omega\nu}.t^2 \qquad (4.14)$$

Γραφικά θα έχουμε:



Σχήμα 4.7

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (4.14):



Σχήμα 4.8

Η σχέση (4.1) μας δείχνει ότι σε διάγραμμα ω=f(t) το εμβαδόν μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα χρόνων δίνει την γωνιακή μετατόπιση Δθ. Επομένως από το Σχήμα 4.8 θα έχουμε:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_o = \text{Εμβαδόν}_{τραπ} = \frac{(\omega_o + \omega_1).t_1}{2} = \frac{(\omega_o + \omega_o + \alpha_{γων}.t_1).t_1}{2} = \frac{(2.\omega_o + \alpha_{γων}.t_1).t_1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\theta = \omega_o.t + \frac{1}{2}.\alpha_{γων}.t^2 + \theta_o$$

αν θεωρήσουμε τυχαία χρονική στιγμή t και ότι υπάρχει αρχική γωνία θ_o.

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τα γραμμικά μεγέθη αν αντιστοιχήσουμε:

$s \rightarrow \theta$, $\upsilon \rightarrow \omega$, $\alpha \rightarrow \alpha_{γων}$ οπότε θα έχουμε αντίστοιχα:

ΟΜΑΛΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ:

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \quad (4.15)$$

$$\vec{\upsilon} = \text{σταθερό} \quad (4.16)$$

$$s = s_o + \upsilon.t \quad (4.17)$$

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ:

$$\vec{\alpha} = \text{σταθερό} \quad (4.18)$$

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha.t \quad (4.19)$$

$$s = s_o + \upsilon_o.t + \frac{1}{2}.\alpha.t^2 \quad (4.20)$$

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι ίδιες με αυτές των σχημάτων 4.6 και 4.7.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Σε διάγραμμα ω=f(t) το εμβαδόν δίνει το Δθ μεταξύ δύο χρονικών στιγμών όπως έχουμε αναφέρει. Στο ίδιο διάγραμμα η κλίση της εφαπτομένης δίνει την $\alpha_{γων}$.

Αντίστοιχα σε διάγραμμα $\alpha_{γων}$=f(t) το εμβαδόν δίνει την μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας Δω που το σύστημα αποκτά σε δεδομένο χρόνο.

Τέλος σε διάγραμμα θ=f(t) η κλίση της εφαπτομένης κάθε χρονική στιγμή δίνει την γωνιακή ταχύτητα ω εκείνη την χρονική στιγμή.

2. Αντίστοιχα για τα γραμμικά μεγέθη θα έχουμε:

Σε διάγραμμα υ=f(t) το εμβαδόν δίνει το μήκος τόξου Δs μεταξύ δύο χρονικών στιγμών όπως έχουμε αναφέρει. Στο ίδιο διάγραμμα η κλίση της εφαπτομένης δίνει την α.

Αντίστοιχα σε διάγραμμα α=f(t) το εμβαδόν δίνει την μεταβολή της γραμμικής ταχύτητας Δυ σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Τέλος σε διάγραμμα s=f(t) η κλίση της εφαπτομένης κάθε χρονική στιγμή, δίνει επίσης την γραμμική ταχύτητα υ εκείνη την χρονική στιγμή.

3. Αν λύσουμε τη σχέση 4.13 ως προς t θα έχουμε:

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$$

και αντικαταστήσουμε στη σχέση 4.14 (θεωρώντας θ_o=0) θα έχουμε:

$$\Delta\theta = \omega_o . \frac{\omega - \omega_o}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} + \frac{1}{2} . \alpha_{\gamma\omega\nu} . \frac{(\omega - \omega_o)^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}^2} \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Delta\theta = \frac{\omega_o . \omega - \omega_o^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} + \frac{\omega^2 + \omega_o^2 - 2.\omega.\omega_o}{2.\alpha_{\gamma\omega\nu}}} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{\omega^2 = \omega_o^2 + 2.\alpha_{\gamma\omega\nu} . \Delta\theta} \qquad (4.21)$$

Η σχέση (4.21) ονομάζεται χρονικά ανεξάρτητη. Αντίστοιχη σχέση μπορούμε να βγάλουμε από τις σχέσεις 4.19 και 4.20, δηλαδή:

$$\mathbf{\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2.\alpha.\Delta s} \qquad (4.22)$$

4. Αν ένα στερεό εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιβράδυνση μέτρου $|a_{\gamma\omega\nu}|$ τότε η σχέση 4.13 γίνεται:

$$\mathbf{\omega = \omega_o - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| . t}$$

και μας δίνει το χρόνο που απαιτείται ώστε το σώμα για να σταματήσει, αν θέσουμε ω=0. Θα έχουμε:

$$t_{\max} = \frac{\omega_o}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} \qquad (4.23)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 4.23 στην 4.14 η οποία για την επιβραδυνόμενη κίνηση γίνεται:

$$\theta = \omega_o . t - \frac{1}{2} . |\alpha_{\gamma\omega\nu}| . t^2$$

θα έχουμε για την γωνία στροφής του στερεού μέχρι να σταματήσει:

$$\theta_{\mathbf{max}} = \omega_o . \frac{\omega_o}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} - \frac{1}{2} . |\alpha_{\gamma\omega\nu}| . \frac{|\omega_o|^2}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|^2} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{\theta_{max} = \frac{|\omega_o|^2}{2.|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}} \qquad (4.24)$$

4.3 ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζουμε το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με την μάζα του σώματος, αν ασκούνται σε αυτό όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό σώμα.
Στα συμμετρικά και ομογενή σώματα το κέντρο μάζας ταυτίζεται με το κέντρο συμμετρίας τους. Πάντως το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και εκτός του σώματος (π.χ. σε ομογενή δακτύλιο, όπου το κέντρο μάζας βρίσκεται στο κέντρο του δακτυλίου δηλ. εκτός της μάζας του). Επίσης για σώματα που βρίσκονται σε ομογενή βαρυτικά πεδία, το κέντρο μάζας και το κέντρο βάρους του σώματος ταυτίζονται. Έτσι πάντα στις ασκήσεις που θα λύνουμε θα θεωρούμε ότι το κέντρο μάζας και το κέντρο βάρους των σωμάτων ταυτίζονται.

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί και μεταφορική κίνηση τότε όλα τα σημεία του έχουν μία κοινή συνιστώσα ταχύτητας (μεταφορική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$) και μία κοινή συνιστώσα επιτάχυνσης (μεταφορική επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$) που ουσιαστικά είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας αντίστοιχα. Σε αντιστοιχία με τις εξισώσεις (4.15) ως και (4.20) και με βάση τις γνώσεις από την Α΄ Λυκείου θα έχουμε για τις εξισώσεις της μεταφορικής κίνησης:

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{cm} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (4.25)$$

$$\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{cm} = \textbf{σταθερό} \qquad (4.26)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_o} + \boldsymbol{\upsilon}_{cm}.\mathbf{t} \qquad (4.27)$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{cm} = \textbf{σταθερό} \qquad (4.28)$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_{cm} = \boldsymbol{\upsilon}_{cm\,o} + \boldsymbol{\alpha}_{cm}.\mathbf{t} \qquad (4.29)$$

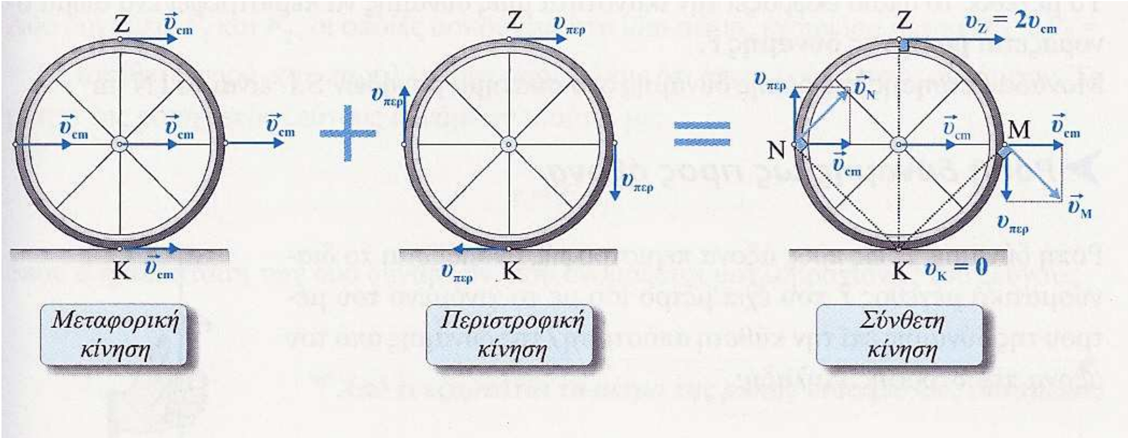
$$\mathbf{x} = \mathbf{x_o} + \boldsymbol{\upsilon}_{cm\,o}.\mathbf{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.\boldsymbol{\alpha}_{cm}.\mathbf{t}^2 \qquad (4.30)$$

Οι γραφικές παραστάσεις είναι επίσης ίδιες με αυτές των σχημάτων 4.6 και 4.7.

4.4 ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί και μεταφορική και στροφική κίνηση, λέμε ότι κάνει **σύνθετη κίνηση**. Τότε κάθε σημείο του σώματος θα έχει μία ταχύτητα, η οποία θα μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, την μεταφορική και την γραμμική.

Στην γενική περίπτωση η μεταφορική και η γραμμική ταχύτητα δεν είναι ίσες. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις (συνήθως αυτό γίνεται) που οι δύο αυτές ταχύτητες έχουν ίσα μέτρα, όπως π.χ. όταν ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει (σχήμα 4.9), οπότε τα σημεία της περιφέρειας του τροχού θα έχουν γραμμική ταχύτητα ίση κατά μέτρο με την μεταφορική του ταχύτητα.



Σχήμα 4.9

Για τον τροχό του σχήματος 4.9 λοιπόν που εκτελεί σύνθετη κίνηση, αν σε χρόνο dt στραφεί ο τροχός κατά γωνία dθ, το σημείο επαφής του με το έδαφος θα διαγράψει τόξο ds και το κέντρο μάζας του θα μετατοπιστεί κατά dx όπου:

$$dx = ds \Leftrightarrow dx = R.d\theta \Leftrightarrow \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = R.\frac{d\theta}{\mathrm{dt}} \Leftrightarrow \upsilon_{\mathrm{cm}} = \upsilon = \omega.\mathrm{R} \qquad (4.31)$$

Το σημείο Κ που είναι σημείο επαφής με το έδαφος θα είναι διαρκώς ακίνητο αφού:

$$\vec{\upsilon}_K = \vec{\upsilon}_{cm} - \vec{\upsilon} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\upsilon}_{\mathbf{cm}} = \vec{\upsilon}$$

Αντίστοιχα λοιπόν οι ταχύτητες των σημείων Α, Β και Δ θα είναι:

$$\vec{\upsilon}_Z = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{cm} = 2.\vec{\upsilon} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{2}.\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \mathbf{2}.\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{\mathbf{cm}}$$

$$\upsilon_N = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_{cm}^2} = \sqrt{2.\upsilon^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{N}} = \sqrt{\mathbf{2}}.\boldsymbol{\upsilon}$$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{M}} = \sqrt{\mathbf{2}}.\boldsymbol{\upsilon}$$

με κατεύθυνση όμως διαφορετική από αυτή της υ_N, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.9.

<u>Τονίζουμε και πάλι</u> πάντως ότι η ισότητα της γραμμικής ταχύτητας με την μεταφορική είναι κάτι που δεν συμβαίνει πάντα, παρά μόνο σε κάποιες περιπτώσεις.

Στην περίπτωση βέβαια που κατά την σύνθετη κίνηση ενός στερεού σώματος, όπως συμβαίνει στο Σχήμα 4.9, κάποια σημεία του έχουν γραμμική ταχύτητα συνεχώς ίση κατά μέτρο με την μεταφορική, τότε τα σημεία αυτά θα έχουν και γραμμική επιτάχυνση κατά μέτρο ίση με την μεταφορική, αφού:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{cm}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{dt}} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{cm}} \qquad (4.32)$$

4.5 ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Α. ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Έστω ότι σε ένα στερεό ασκείται δύναμη $\vec{F}$, κάθετη στο επίπεδο που ορίζει ο σταθερός άξονας περιστροφής του σώματος και η απόσταση $\vec{d}$ (βλέπε σχήμα 4.10α η οποία ονομάζεται μοχλοβραχίονας) του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής.

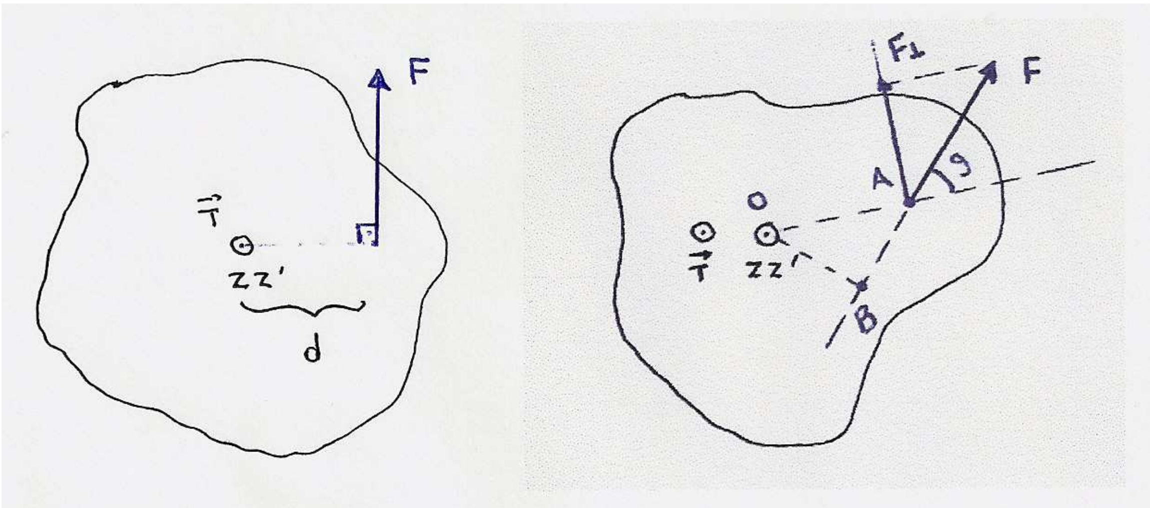
Ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος του οποίου το μέτρο ισούται με το γινόμενο της δύναμης επί την απόσταση της από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας). Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F.d} \qquad (4.33)$$

Η διεύθυνση της ροπής (σχήμα 4.10) βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. **Μονάδα μέτρησης της ροπής στο S.I. είναι το 1 N.m.**

Προφανώς όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10β, αν η δύναμη δεν είναι κάθετη στο επίπεδο άξονα-μοχλοβραχίονα, τότε ροπή προκαλεί μόνο η κάθετη συνιστώσα, οπότε (Σχήμα 4.10) το μέτρο της θα είναι:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F_{\perp}.(OA) = F.\eta\mu\theta.(OA) = F.(OB)} \qquad (4.34)$$



Σχήμα 4.10α **Σχήμα 4.10β**

Β. ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ

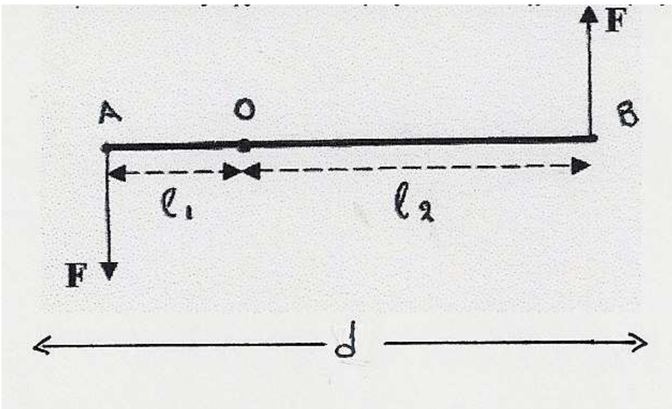
Ροπή δύναμης ως προς σημείο ορίζουμε το διανυσματικό μέγεθος του οποίου το μέτρο ισούται με το γινόμενο της δύναμης επί την απόσταση της από το σημείο. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F.d} \qquad (4.33)$$

Η διεύθυνση της ροπής βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στο επίπεδο που ορίζει η δύναμη και το σημείο και η φορά δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Γ. ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ονομάζεται ένα σύστημα δύο αντίθετων δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα και οι οποίες έχουν διαφορετικά σημεία εφαρμογής.



Σχήμα 4.11

Στην περίπτωση αυτή όπως προκύπτει από το Σχήμα 4.11, η ροπή που θα ασκεί το ζεύγος δυνάμεων θα είναι:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1.l_1 + F_2.l_2 = F.(l_1 + l_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F.d} \qquad (4.35)$$

όπου d η απόσταση (AB) των φορέων των δύο δυνάμεων. Επομένως η ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου των δυνάμεων επί την απόσταση των φορέων τους, δηλαδή είναι ανεξάρτητη από την θέση του άξονα περιστροφής (σημείο O).

4.6 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ (ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON)

Α. ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Ένα σώμα ισορροπεί μεταφορικά όταν η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum F_x = 0 \text{ και } \sum F_y = 0 \Leftrightarrow \vec{\upsilon} = \vec{0} \text{ ή σταθερή}$$

Β. ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Ένα σώμα ισορροπεί στροφικά όταν η συνισταμένη των ροπών που ασκούνται πάνω του είναι ίση με μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο. Δηλαδή:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \vec{0} \text{ ή σταθερό}$$

Γ. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ

Ένα στερεό ισορροπεί όταν η συνισταμένη των δυνάμεων και των ροπών (ως προς οποιοδήποτε σημείο) που ασκούνται πάνω του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \qquad \text{και} \qquad \sum \tau = 0 \text{ (ως προς οποιοδήποτε σημείο)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Κάθε δύναμη που είναι παράλληλη με τον άξονα περιστροφής ή που ο φορέας της περνάει από τον άξονα περιστροφής, προκαλεί μηδενική ροπή.

2. Αν σε ένα στερεό που ισορροπεί ασκούνται ν δυνάμεις και οι ν-1 από αυτές είναι παράλληλες, τότε και η ν-οστή θα είναι παράλληλη.

Απόδειξη:

Αν η ν-στη δύναμη δεν ήταν παράλληλη με τις υπόλοιπες ν-1, οι οποίες π.χ. έστω ότι έχουν τις διευθύνσεις τους πάνω στον x-άξονα, τότε αν αναλύσουμε την ν-οστή δύναμη, θα έχει συνιστώσα στον y-άξονα, η οποία θα είναι η μοναδική συνιστώσα του y-άξονα και επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων στον y-άξονα δεν θα είναι ίση με μηδέν. Άρα το στερεό σώμα δεν μπορεί να ισορροπεί.

3. Αντίστοιχα αν σε ένα στερεό που ισορροπεί ασκούνται ν δυνάμεις και οι φορείς των ν-1 από αυτές περνούν από σημείο Ο, τότε και η ν-οστή δύναμη θα περνά από αυτό το σημείο. <u>Επομένως όταν σε ένα στερεό σώμα που ισορροπεί ασκούνται τρεις (3) δυνάμεις, οι φορείς τους διέρχονται οπωσδήποτε από το ίδιο σημείο.</u>

Απόδειξη:

Αν οι φορείς των ν-1 δυνάμεων περνούσαν από το σημείο Ο, ενώ ο φορέας της ν-οστής δύναμης δεν πέρναγε από αυτό το σημείο, τότε η συνιστάμενη ροπή ως προς το σημείο Ο θα ήταν διάφορη του μηδενός, επομένως το στερεό δεν θα ισορροπούσε.

4. Αν $\sum \vec{F} = \vec{0}$ και $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ είδαμε ότι το στερεό ισορροπεί. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα:

i) Αν αρχικά είναι ακίνητο, θα παραμείνει ακίνητο.

ii) Αν αρχικά κινείται μόνο μεταφορικά, θα συνεχίσει να κινείται μόνο μεταφορικά με σταθερή μεταφορική ταχύτητα.

iii) Αν αρχικά κινείται στροφικά, θα συνεχίσει να κινείται στροφικά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

5. Αντίστοιχα ένα στερεό αρχικά ηρεμεί τότε:

i) Αν $\sum \vec{F} = \vec{0}$ και $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ το στερεό θα συνεχίσει να ηρεμεί.

ii) Αν $\sum \vec{F} = \vec{0}$ και $\sum \vec{\tau} \neq \vec{0}$ το στερεό θα κινείται μόνο στροφικά.

iii) Αν $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ και $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ το στερεό θα κινείται μόνο μεταφορικά.

iv) Αν $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ και $\sum \vec{\tau} \neq \vec{0}$ το στερεό θα εκτελέσει και στροφική και μεταφορική κίνηση.

6. Προσοχή!!!

Για ένα ελεύθερο στερεό (που δεν έχει δηλαδή συγκεκριμένο άξονα περιστροφής), και εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, η συνισταμένη των ροπών πρέπει να είναι ίση με μηδέν μόνο ως το κέντρο μάζας <u>και όχι υποχρεωτικά ως προς οποιοδήποτε σημείο.</u>

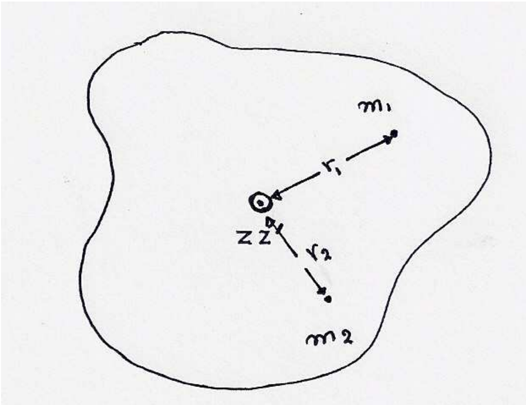
7. Αν σε ένα στερεό που μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα (δεν έχει δηλαδή συγκεκριμένο άξονα περιστροφής), ασκείται μία μόνο δύναμη, τότε αν περνά ο φορέας της από το κέντρο μάζας το στερεό θα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση (αφού δεν θα δέχεται ροπή), ενώ αν ο φορέας της δύναμης δεν περνά από το κέντρο μάζας θα εκτελεί σύνθετη κίνηση.

4.7 ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας (Ι) ενός στερεού σώματος ως προς έναν άξονα περιστροφής, ονομάζουμε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής.
Αν θεωρήσουμε δηλαδή ότι το στερεό αποτελείται από στοιχειώδες μάζες m_1, m_2 κ.ο.κ. (σχήμα 4.12) οι οποίες απέχουν από τον άξονα περιστροφής αποστάσεις r_1, r_2 κ.ο.κ. αντίστοιχα, τότε η ροπή αδράνειας θα είναι:

$$\mathbf{I = m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2 + ...} \qquad (4.36)$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και στο S.I. μετριέται σε **kg.m²**.



Σχήμα 4.12

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Προφανώς η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας m που μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο και απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής θα είναι:

$$\mathbf{I = m.r^2}$$

2. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος δεν εξαρτάται μόνο από την μάζα του αλλά και από την κατανομή της γύρω από τον άξονα περιστροφής. Επομένως αλλαγή του άξονα περιστροφής προκαλεί και μεταβολή της ροπής αδράνειας.

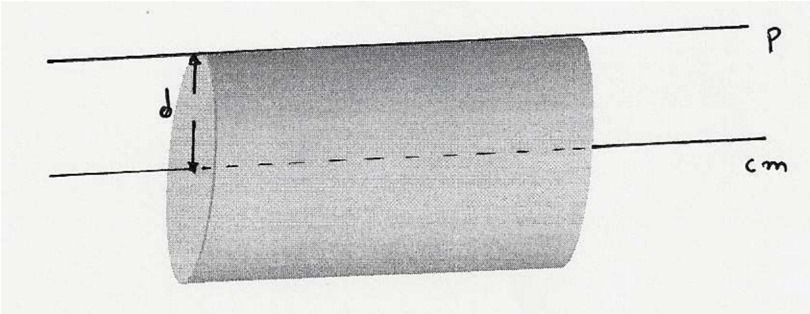
3. Για ομογενή στερεά σώματα υπάρχουν τύποι οι οποίοι δίνουν την ροπή αδράνειας, εξαρτώμενοι από το σχήμα τους.

4. *Η ροπή αδράνειας είναι το μέτρο της αδράνειας στην στροφική κίνηση, όπως η μάζα είναι το μέτρο της αδράνειας στην μεταφορική κίνηση.*

Θεώρημα των παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα Steiner:

Αν ένα στερεό μάζας Μ έχει ροπή αδράνειας I_{cm} ως προς άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του, τότε η ροπή αδράνειας I_P ως προς άξονα P, ο οποίος είναι παράλληλος με τον πρώτο και απέχει απόσταση d από αυτόν (Σχήμα 4.13) θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{I_P = I_{cm} + M.d^2} \qquad (4.37)$$



Σχήμα 4.13

4.8 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (2ος ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON)

Ας θυμηθούμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική κίνηση:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}.\vec{\alpha}_{\mathbf{cm}} \qquad (4.38)$$

δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα, ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.

Η αντίστοιχη σχέση για την στροφική κίνηση είναι η ακόλουθη:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}.\boldsymbol{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \qquad (4.39)$$

δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας του στερεού ως προς αυτόν τον άξονα επί την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.

Ο παραπάνω νόμος ισχύει και στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται αρκεί να μετατοπίζεται παράλληλα με τον εαυτό του και να είναι άξονας συμμετρίας.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Αν $\sum \tau = 0$ τότε από σχέση (4.39) προκύπτει $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$, κάτι που έχουμε δει στην προηγούμενη παράγραφο.

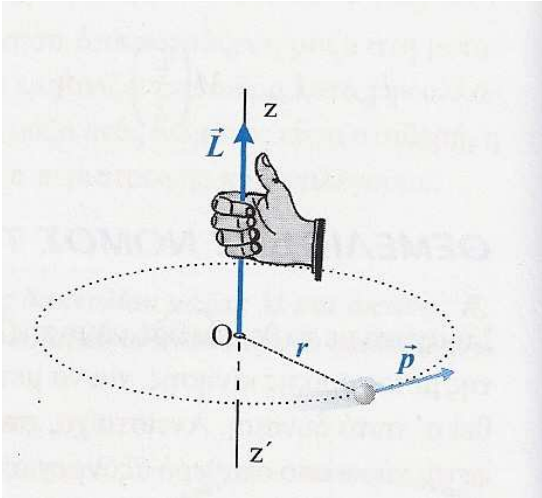
4.9 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ-ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ-ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Α. ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

1. Στροφορμή υλικού σημείου,

ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος του οποίου το μέτρο ισούται με το γινόμενο της ορμής του σώματος επί την ακτίνα της κυκλικής του τροχιάς (Σχήμα 4.14). Δηλαδή:

$$\mathbf{L} = \mathbf{p}.\mathbf{r} = \mathbf{m}.\boldsymbol{\upsilon}.\mathbf{r} \qquad (4.40)$$



Σχήμα 4.14

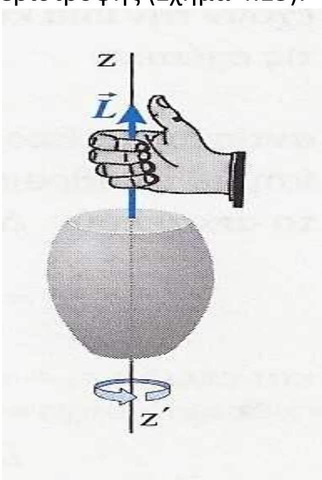
Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο της κίνησης και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα μέτρησης της στροφορμής στο S.I. είναι το **kg.m²/s.**

2. Στροφορμή στερεού σώματος,

ως προς άξονα περιστροφής ονομάζουμε το γινόμενο της ροπής αδράνειας του σώματος ως προς αυτό τον άξονα επί την γωνιακή του ταχύτητα. Δηλαδή:

$$\vec{\mathbf{L}} = \mathbf{I}.\vec{\boldsymbol{\omega}} \qquad (4.41)$$

Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι ίδια με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας, δηλαδή βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής (Σχήμα 4.15).



Σχήμα 4.15

Απόδειξη:

Αν χωρίσουμε το στερεό σε στοιχειώδης μάζες m_1, m_2 κ.ο.κ. αυτές κατά την στροφική κίνηση του στερεού θα εκτελούν κυκλικές κινήσεις με γωνιακή ταχύτητα ω, γραμμικές ταχύτητες υ_1, υ_2 κ.λ.π. αντίστοιχα σε κύκλους ακτίνας r_1, r_2 κ.ο.κ. (δες παρακάτω σχήμα 4.16). Η ολική στροφορμή του στερεού θα είναι λοιπόν:

$$L = m_1.\upsilon_1.r_1 + m_2.\upsilon_2.r_2 + ...$$

Όμως π.χ. $\upsilon_1 = \omega.r_1$, οπότε τελικά:

$$L = m_1.\omega.r_1^2 + m_2.\omega.r_2^2 + ... \Leftrightarrow L = \omega.(m_1.r_1^2 + m_2.r_2^2 + ...) \Leftrightarrow \vec{L} = I.\vec{\omega}$$

3. Στροφορμή συστήματος σωμάτων,
ονομάζουμε το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών κάθε σώματος του συστήματος, δηλαδή:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \ldots\ldots \qquad (4.42)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Ειδικά για στερεά που στρέφονται γύρω από άξονα περιστροφής ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας τους, η στροφορμή που έχουν λόγω της περιστροφής τους γύρω από αυτόν τον άξονα ονομάζεται ***ιδιοπεριστροφή (spin).*** Για παράδειγμα τα ηλεκτρόνια στα άτομα πέρα από την περιστροφή τους γύρω από τον πυρήνα στρέφονται και γύρω από τον δικό τους άξονα περιστροφής, δηλαδή έχουν spin το οποίο παίρνει τιμές: $\pm\frac{\hbar}{2} = \pm\frac{h}{4\pi}$, όπου $h=6{,}626.10^{-34}$ J.s η σταθερά του Planck.

2. Η στροφορμή έχει στην στροφική κίνηση τον ρόλο που έχει η ορμή στην μεταφορική κίνηση.

Β. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

1. Γενίκευση του θεμελιώδη νόμου της μηχανικής στην μεταφορική κίνηση

$$\sum\vec{F} = m.\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow \sum\vec{F} = m.\frac{d\vec{\upsilon}_{cm}}{dt} = m.\frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{dt} = \frac{m.\vec{\upsilon}_2 - m.\vec{\upsilon}_1}{dt} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\sum\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{dt}} \qquad (4.43)$$

δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

Σε ένα σύστημα σωμάτων, οι εσωτερικές δυνάμεις εξουδετερώνονται αφού εμφανίζονται πάντα σε ζεύγη (νόμος δράσης-αντίδρασης), άρα μας απασχολούν οι εξωτερικές δυνάμεις. Επομένως:

$$\sum\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\xi} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{O\Lambda}}}{\mathbf{dt}} \qquad (4.44)$$

δηλαδή η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ολικής ορμής του συστήματος.

2. Γενίκευση του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης

$$\sum\tau = I.\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \sum\tau = I.\frac{d\omega}{dt} = I.\frac{\omega_2 - \omega_1}{dt} = \frac{I.\omega_2 - I.\omega_1}{dt} = \frac{L_2 - L_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\sum\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{dt}} \qquad (4.45)$$

δηλαδή η συνισταμένη των ροπών (ή το αλγεβρικό άθροισμα τους αν έχω σταθερό άξονα περιστροφής) που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος.

Σε ένα σύστημα σωμάτων, οι εσωτερικές δυνάμεις όπως είπαμε εξουδετερώνονται άρα εξουδετερώνονται και οι ροπές αυτών των δυνάμεων (νόμος δράσης-αντίδρασης) και μας απασχολούν μόνο οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων. Επομένως:

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\varepsilon\xi} = \frac{\mathbf{dL_{O\Lambda}}}{\mathbf{dt}} \qquad (4.46)$$

δηλαδή η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών (ή το αλγεβρικό τους άθροισμα αν έχουμε σταθερό άξονα περιστροφής) που ασκούνται σε ένα σύστημα στερεών σωμάτων, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ολικής στροφορμής του συστήματος.

Γ. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

1. Για ένα σώμα:

Αν $\sum \tau = 0 \Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Leftrightarrow dL = 0 \Leftrightarrow L = \text{σταθερό}$

Δηλαδή:

$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\mathbf{L_{APX}=L_{TE\Lambda}}$ **ή**

όταν η συνισταμένη των ροπών που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ίση με μηδέν, η στροφορμή του παραμένει σταθερή.

2. Για σύστημα σωμάτων:

Αν $\sum \tau_{\varepsilon\xi} = 0 \Leftrightarrow \frac{dL_{O\Lambda}}{dt} = 0 \Leftrightarrow dL_{O\Lambda} = 0 \Leftrightarrow L_{O\Lambda} = \text{σταθερό}$

Δηλαδή:

$\sum \boldsymbol{\tau}_{\varepsilon\xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\mathbf{L_{O\Lambda\alpha\rho\chi}=L_{O\Lambda\tau\varepsilon\lambda}}$ **ή**

όταν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίση με μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

4.10 ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

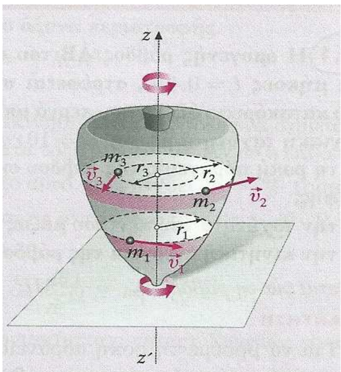
Α. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1. Λόγω μεταφορικής κίνησης:

$$\mathbf{K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}.M.\upsilon_{cm}^2} \qquad (4.47)$$

2. Λόγω στροφικής κίνησης:

Αν διαμερίσουμε ένα στερεό το οποίο στρέφεται σε στοιχειώδης μάζες m_1, m_2 κ.λ.π. αυτές κατά την στροφική κίνηση του στερεού θα εκτελούν κυκλικές κινήσεις με γωνιακή ταχύτητα ω, γραμμικές ταχύτητες υ_1, υ_2 κ.λ.π. αντίστοιχα, σε κύκλους ακτίνας r_1, r_2 κ.ο.κ (σχήμα 4.16). Η ολική κινητική ενέργεια τότε του στερεού λόγω της στροφικής κίνησης θα είναι:



Σχήμα 4.16

$$K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}.m_1.\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.\upsilon_2^2 + ...$$

Όμως $\upsilon_1 = \omega.r_1$, $\upsilon_2 = \omega.r_2$ κ.ο.κ. οπότε:

$$K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}.m_1.\omega^2.r_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.\omega^2.r_2^2 + ... \Leftrightarrow K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}.\omega^2.(m_1.r_1^2 + m_2.r_2^2 + ...) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}.I.\omega^2} \qquad (4.48)$$

3. Λόγω σύνθετης κίνησης:

$$\mathbf{K_{o\lambda} = K_{\mu\epsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}.M.\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2} \qquad (4.49)$$

<u>Β. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ</u>

1. Συντηρητικές δυνάμεις:

Να θυμηθούμε ότι ***συντηρητικές δυνάμεις,*** ονομάζονται οι δυνάμεις εκείνες των οποίων των έργο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι **μηδενικό** ή αλλιώς οι δυνάμεις των οποίων το έργο μεταξύ δύο σημείων εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση και όχι από την διαδρομή.

2. Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.):

Όταν σε σώμα ή σε ένα σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, τότε η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή, δηλαδή:

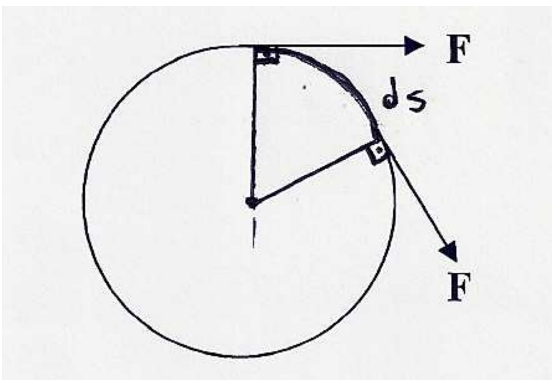
$$\mathbf{E_{O\Lambda} = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{\eta}} \Leftrightarrow \mathbf{K_{O\Lambda\,APX} + U_{O\Lambda\,APX} = K_{O\Lambda\,TE\Lambda} + U_{O\Lambda\,TE\Lambda}} \qquad (4.50)$$

<u>Γ. ΈΡΓΟ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΤΗΝ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ</u>

1. Έργο στην στροφική κίνηση:

Όταν ένα στερεό κάνει μόνο στροφική κίνηση π.χ. ένας τροχός και ο οποίος δέχεται μια εφαπτομενική δύναμη (Σχήμα 4.17), τότε για μια απειροστή μεταβολή του τροχού κατά γωνία dθ, το σημείο εφαρμογής της μετακινείται κατά ds, οπότε το έργο της δύναμης θα είναι:

$$dW = F.ds$$



Σχήμα 4.17

Όμως από την γεωμετρία γνωρίζουμε ότι θα ισχύει:

$$ds = R.d\theta$$

επομένως θα έχουμε:

$$dW = F.R.d\theta \Leftrightarrow dW = \tau.d\theta \Leftrightarrow \quad \mathbf{W=\tau.\theta} \qquad (4.51)$$

2. Η ισχύς της δύναμης στην στροφική κίνηση:

Η ισχύς της δύναμης στην παραπάνω περίπτωση, δηλαδή ο ρυθμός προσφοράς έργου θα είναι:

$$dW = \tau.d\theta \Leftrightarrow \frac{dW}{dt} = \tau.\frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \quad \mathbf{\frac{dW}{dt} = P = \tau.\omega} \qquad (4.52)$$

<u>Δ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Ε.Ε.) Ή ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Μ.Κ.Ε.)</u>

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων, ισούται με το ολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Δηλαδή:

$$\mathbf{\Delta K = \sum W \Leftrightarrow K_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} = W_1 + W_2 + ...} \qquad (4.53)$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:</u>

1. **Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας** στη στροφική κίνηση υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{\Delta K_{ΣΤΡ} = \sum W \Leftrightarrow \frac{dK_{ΣΤΡ}}{dt} = \frac{d\sum W}{dt} = \frac{\sum \tau.d\theta}{dt} \Leftrightarrow \frac{dK_{ΣΤΡ}}{dt} = \sum \tau.\omega} \qquad (4.54)$$

2. Όταν για ένα στερεό σώμα που κάνει σύνθετη κίνηση, όπως π.χ. ένας τροχός που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, θέλουμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε., μπορούμε να το εφαρμόσουμε θεωρώντας ότι το στερεό εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από τον **στιγμιαίο άξονα περιστροφής**.