ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πίεση (P) ονομάζουμε το φυσικό μονόμετρο μέγεθος που δείχνει *το μέτρο της δύναμης που ασκείται* ***κάθετα*** *στην μονάδα της επιφάνειας*. Δηλαδή:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}} \qquad (3.1)$$

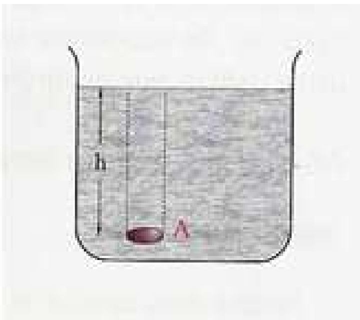
Μονάδα μέτρησης της πίεσης στο S.I. είναι το 1 Pa=1 N/m^2. Μία άλλη συνηθισμένη μονάδα πίεσης είναι η 1 atm=1,013.10^5 Pa. Συνήθως στις ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε την σχέση μετατροπής στο S.I.: 1 atm=10^5 Pa.

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί αποδίδουν το χαρακτηρισμό «ρευστά» στα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία - αντίθετα με τα στερεά - δεν έχουν δικό τους σχήμα αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει. Η διάκριση των ρευστών σε υγρά και αέρια βασίζεται στη σταθερότητα του όγκου τους (για ορισμένη θερμοκρασία). Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα, έχουν δηλαδή σταθερό όγκο, ανεξάρτητο από την πίεση που δέχονται, εξαιτίας του ότι τα μόρια τους βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο, παρά την σχετική μεταξύ τους κίνηση που τα κάνει να έχουν μεταβλητό σχήμα. Αντίθετα τα αέρια είναι συμπιεστά. Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεσή τους. Και αυτό γιατί οι αποστάσεις των μορίων τους είναι μεγάλες (κατά μέσο όρο 10 φορές μεγαλύτερες από αυτές στα υγρά και τα αέρια) και οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων αμελητέες. Έτσι καθώς η πίεση αυξάνει, οι αποστάσεις των μορίων μειώνονται και τα αέρια συμπιέζονται.

Υδροστατική πίεση σε ένα σημείο ενός υγρού που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, ονομάζεται η πίεση που ασκείται σε ένα πολύ λεπτό σώμα που βρίσκεται σε αυτήν την θέση (βλέπε ακόλουθο σχήμα 3.1) λόγω του βάρους της υπερκείμενης στήλης του υγρού. Αποδεικνύεται ότι σε υγρό πυκνότητας ρ, που βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας εντάσεως g (επιτάχυνση της βαρύτητας) σε βάθος h, η υδροστατική πίεση έχει μέτρο:

$$\mathbf{P_{υδρ} = ρ.g.h} \qquad (3.2)$$

Απόδειξη:



Σχήμα 3.1

Έστω σώμα εμβαδού Α που έχει πολύ λεπτό πάχος που βρίσκεται σε βάθος h υγρού πυκνότητας ρ με την επιφάνειά του οριζόντια. Σχηματίζεται πάνω από το σώμα ένας κύλινδρος υγρού (ή τέλος πάντων ένας πρισματικός σωλήνας υγρού σταθερής διατομής Α, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1), το βάρος του οποίου ασκεί στο σώμα πίεση:

$$P = \frac{m.g}{A} = \frac{\rho.\mathbf{V.g}}{\mathbf{A}} = \frac{\rho.\mathrm{A}.\mathbf{h.g}}{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{P}_{\upsilon\delta\rho} = \mathbf{\rho.g.h} \qquad (3.3)$$

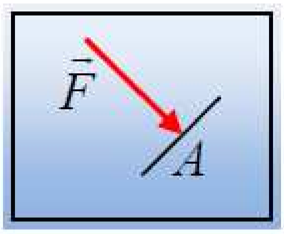
Σημειώσεις:

1. Η υδροστατική πίεση οφείλεται όπως είπαμε στο βάρος του υγρού. Άρα εκτός πεδίου βαρύτητας, ένα υγρό δεν ασκεί υδροστατική πίεση στα σώματα που βρίσκονται μέσα σε αυτό.

2. Σε σημείο δεδομένου υγρού, η υδροστατική πίεση είναι συνάρτηση μόνο του βάθους μέσα στο υγρό.

3. Η πίεση στα υγρά μετριέται με μανόμετρα.

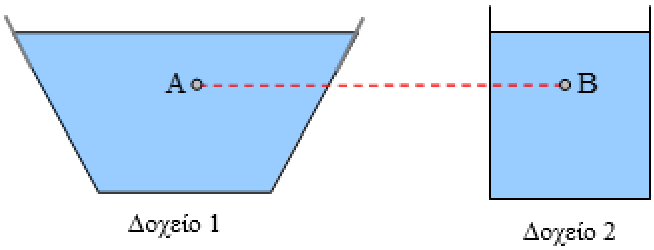
Προφανώς η δύναμη που δέχεται οποιαδήποτε επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ένα ρευστό είναι σε κάθε σημείο κάθετη στην επιφάνεια (σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2

Σημείωση:

Η υδροστατική πίεση δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου ή από τον όγκο του υγρού. Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα (3.3) βλέπουμε δύο δοχεία διαφορετικού σχήματος που περιέχουν νερό. Επίσης ο όγκος του νερού στο δοχείο 1 είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του νερού στο δοχείο 2. Παρ' όλα αυτά η υδροστατική πίεση στο σημείο Α του πρώτου δοχείου είναι η ίδια με τη υδροστατική πίεση στο σημείο Β του δεύτερου δοχείου καθώς τα σημεία αυτά βρίσκονται στο ίδιο βάθος. (Σκεφτείτε ότι αισθανόμαστε την ίδια πίεση στα αυτιά μας είτε βυθιστούμε κατά 1 μέτρο σε μια μικρή πισίνα με θαλασσινό νερό είτε βυθιστούμε κατά 1 μέτρο στη μέση ενός ωκεανού)



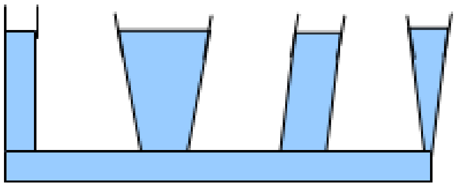
Σχήμα 3.3

<u>**Εφαρμογές της υδροστατικής πίεσης:**</u>

Συγκοινωνούντα δοχεία

Έστω ότι γεμίζουμε με κάποιο υγρό μια σειρά από δοχεία διαφορετικού σχήματος που συγκοινωνούν μέσω ενός κοινού οριζόντιου σωλήνα. Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δοχεία η επιφάνεια του υγρού βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αυτό οφείλεται στο νόμο της υδροστατικής. Εάν σε κάποιο από τα δοχεία η στάθμη του υγρού ήταν σε υψηλότερο επίπεδο η πίεση στον κοινό οριζόντιο σωλήνα θα ήταν μεγαλύτερη στο σημείο του σωλήνα που αντιστοιχεί στο δοχείο αυτό καθώς το σημείο εκείνο θα ήταν σε

μεγαλύτερο βάθος. Επομένως θα υπήρχε διαφορά πίεσης στον οριζόντιο σωλήνα, δηλαδή θα υπήρχε κίνηση του υγρού με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ισορροπήσει.
Επομένως, δύο σημεία ενός υγρού που ισορροπεί έχουν την ίδια πίεση όταν βρίσκονται στο ίδιο βάθος, δηλαδή στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αυτό συμβαίνει ακόμα και όταν το υγρό βρίσκεται σε διαφορετικά, αλλά συγκοινωνούντα, δοχεία.
Στο ακόλουθο σχήμα (3.4) παρατηρούμε 4 συγκοινωνούντα δοχεία διαφορετικών σχημάτων. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού σε κάθε δοχείο βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 3.4

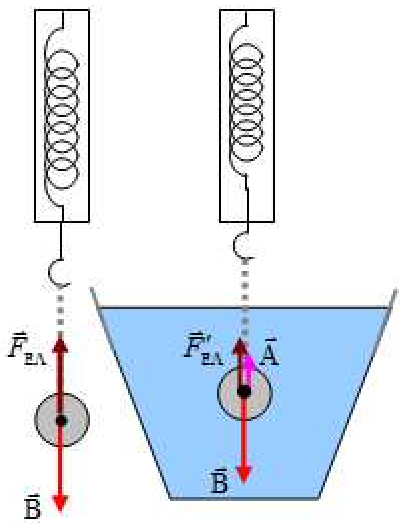
Μια ευρέως γνωστή εφαρμογή των συγκοινωνούντων δοχείων είναι οι δεξαμενές ύδρευσης. Οι δεξαμενές ύδρευσης κατασκευάζονται σε ψηλά σημεία έτσι ώστε το νερό να μπορεί να κυκλοφορεί στα διαμερίσματα (τα οποία βρίσκονται σε χαμηλότερο υψόμετρο) χωρίς να χρειάζεται αντλία.

Άνωση – Αρχή του Αρχιμήδη:

Κάθε σώμα που είναι βυθισμένο πλήρως ή μερικώς σε ένα ρευστό υφίσταται δύναμη άνωσης ίση προς το βάρος του ρευστού το οποίο εκτοπίζει.
Επομένως αν ένα σώμα είναι βυθισμένο κατά όγκο $V_{βυθ}$ μέσα σε υγρό πυκνότητας $ρ_{υγρ}$, τότε το μέτρο της άνωσης που θα δεχθεί θα είναι:

$$A = ρ_{υγρ.} . g . V_{βυθ} \quad (3.4)$$

Η κατεύθυνση της άνωσης είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, δηλαδή αντίθετη του βάρους.
Για να γίνει πλήρως κατανοητή η έννοια της άνωσης κάνουμε το παρακάτω πείραμα (σχήμα 3.5):



Σχήμα 3.5

Στο αριστερό σχήμα έχουμε κρεμάσει μία μικρή μεταλλική σφαίρα από ένα δυναμόμετρο. Η μικρή μεταλλική σφαίρα ισορροπεί υπό την επήρεια του βάρους της $\vec{B}$ και της δύναμης του ελατηρίου του δυναμόμετρου $\vec{F}_{ΕΛ}$. Επομένως για την πρώτη σφαίρα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ΕΛ} - B = 0 \Rightarrow F_{ΕΛ} = B$$

(Η δύναμη $\vec{F}_{ΕΛ}$ αποτελεί την ένδειξη του δυναμόμετρου)

Στο δεξιό σχήμα επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με τη διαφορά ότι η μικρή μεταλλική σφαίρα βρίσκεται σε μία λεκάνη με νερό. Στην περίπτωση αυτή η μικρή μεταλλική σφαίρα ισορροπεί υπό την επήρεια του βάρους της $\vec{B}$ (που παραμένει σταθερό) της δύναμης του ελατηρίου του δυναμόμετρου $\vec{F}'_{ΕΛ}$ και της άνωσης A του νερού. (Η δύναμη $\vec{F}'_{ΕΛ}$ αποτελεί τη νέα ένδειξη του δυναμόμετρου)

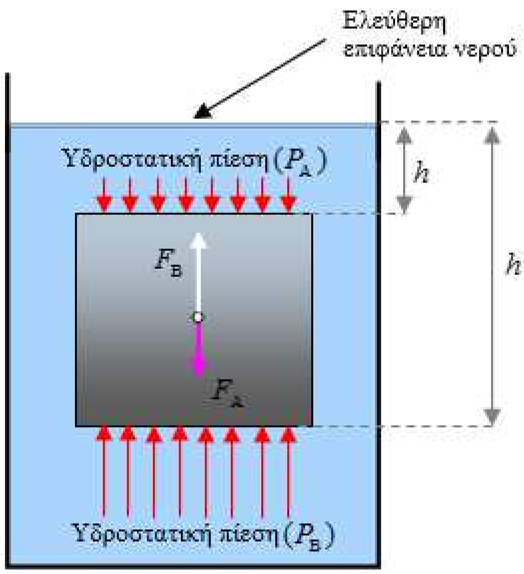
Άρα, στην περίπτωση αυτή ισχύει: $\Sigma F' = 0 \Rightarrow F'_{ΕΛ} + A - B = 0 \Rightarrow F'_{ΕΛ} = B - A$

Επομένως στο δεύτερο πείραμα η ένδειξη του δυναμόμετρου έχει μικρότερη τιμή. Αυτό οφείλεται στην άνωση καθώς η ισορροπία επιτυγχάνεται πλέον υπό την επίδραση τριών δυνάμεων.

Από το παραπάνω πείραμα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι ίση με το βάρος του σώματος μόνο στην περίπτωση του πρώτου πειράματος. Στην περίπτωση του δεύτερου πειράματος η ένδειξη του δυναμόμετρου δίνεται από τη σχέση $F'_{ΕΛ} = B - A$, δηλαδή έχει μικρότερη τιμή από το βάρος του σώματος. *Για το λόγο αυτό πολλές φορές δημιουργείται η αίσθηση ότι το βάρος των σωμάτων στο νερό είναι μικρότερο. Αυτό όπως φάνηκε και στο παραπάνω πείραμα δεν ισχύει! Το βάρος ενός σώματος σε δεδομένο τόπο παραμένει σταθερό.*

Που οφείλεται όμως η άνωση;

Έστω ένας κύβος βυθισμένος σε νερό, όπως στο ακόλουθο σχήμα 3.6. Σε κάθε πλευρά του κύβου ασκείται υδροστατική πίεση από το νερό.



Σχήμα 3.6

Στην επάνω επιφάνεια του κύβου, η υδροστατική πίεση έχει τιμή: $\mathbf{P_A = \rho \cdot g \cdot h}$

Στην επάνω επιφάνεια του κύβου, η οποία έστω ότι έχει εμβαδό $\mathbf{S}$ ασκείται δύναμη λόγω υδροστατικής πίεσης, η οποία έχει τιμή: $\mathbf{F_A = P_A \cdot S}$

Αντίστοιχα, στην κάτω επιφάνεια του κύβου, η υδροστατική πίεση έχει τιμή, $\mathbf{P_B = \rho \cdot g \cdot h'}$ με αποτέλεσμα η δύναμη που της ασκείται να έχει τιμή $\mathbf{F_B = P_B \cdot S}$. (Οι δυνάμεις στα πλευρικά τοιχώματα έχουν συνισταμένη μηδέν).
Όμως λόγω μεγαλύτερου βάθους η υδροστατική πίεση στο Β είναι μεγαλύτερη από ότι στο Α, με αποτέλεσμα να έχουμε συνιστάμενη δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω με μέτρο:

$$\mathbf{A=F_B-F_A=(P_B-P_A).S}$$

που δεν είναι άλλη από την άνωση.

Επομένως η άνωση οφείλεται στη διαφορά της υδροστατικής πίεσης στην πάνω και την κάτω επιφάνεια του κύβου (ή γενικότερα οποιοδήποτε σώματος).

Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η άνωση;

Η άνωση εξαρτάται από:

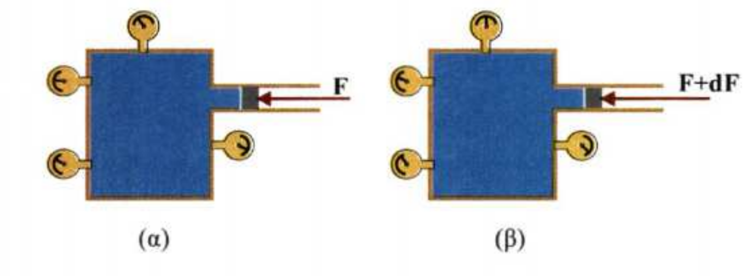
1. Από την πυκνότητα του υγρού (μεγαλύτερη πυκνότητα σημαίνει μεγαλύτερη άνωση).
2. Από τον όγκο του σώματος το οποίο είναι βυθισμένο στο υγρό (μεγαλύτερος όγκος βυθισμένος στο νερό σημαίνει μεγαλύτερη άνωση).

Η άνωση δεν εξαρτάται από:

1. Από το σχήμα του σώματος
2. Από το βάρος του σώματος
3. Από το βάθος στο οποίο βυθίσαμε το σώμα

3.2 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ – ΑΡΧΗ ΤΟΥ PASCAL

Όταν ένα υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, σε όλη του την έκταση επικρατεί η ίδια πίεση, αφού η υδροστατική πίεση η οποία εξαρτάται από το βάθος είναι παντού μηδενική. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι:
η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του (αρχή του Pascal).
Για παράδειγμα, στο δοχείο του ακόλουθου σχήματος 3.7, τα μανόμετρα δείχνουν όλα την ίδια πίεση όταν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά **ΔF** θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά **ΔF/A** (όπου Α το εμβαδόν του εμβόλου).



Σχήμα 3.7

Εάν τώρα το δοχείο βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, η πίεση που δείχνουν τα μανόμετρα είναι διαφορετική στο κάθε ένα από αυτά, ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκεται. Αν πάλι αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα μανόμετρα κατά ΔF/A.

Σημείωση:

Αν κάποιο υγρό ισορροπεί σε ανοιχτό δοχείο, στην ελεύθερη επιφάνειά του ασκείται η ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι η πίεση σε βάθος h θα είναι:

$$P_{ολ}=P_{atm}+ρ.g.h \qquad (3.5)$$

ακριβώς επειδή, όπως προβλέπει η αρχή του Pascal, η ατμοσφαιρική πίεση μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού.

3.3 ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Κατά την κίνηση των ρευστών αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων τους (εσωτερική τριβή) αλλά και μεταξύ των μορίων τους και των τοιχωμάτων του σωλήνα μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση (δυνάμεις συνάφειας). Αν οι δυνάμεις που προαναφέραμε υπερβούν κάποιο όριο το ρευστό δημιουργεί κατά τη ροή του δίνες και η ροή λέγεται **τυρβώδης** ή **στροβιλώδης** (σχήμα 3.8).

Σχήμα 3.8

Η μελέτη μιας τέτοιας κίνησης είναι πολύπλοκη. Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη της ροής ενός ρευστού που:

α. δεν παρουσιάζει εσωτερικές τριβές κατά την κίνησή του

β. δεν παρουσιάζει τριβές με τα τοιχώματά του σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει και

γ. είναι ασυμπίεστο.

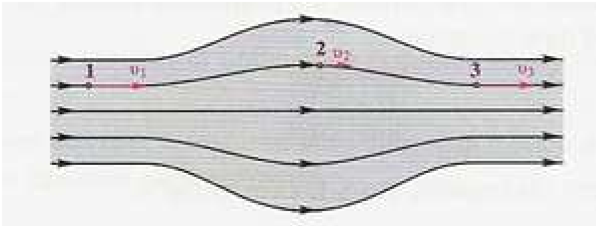
Ένα τέτοιο ρευστό χαρακτηρίζεται ως **ιδανικό.** ***Η ροή ενός ιδανικού ρευστού είναι στρωτή, δηλαδή δεν παρουσιάζει στροβίλους.***

Στην πραγματικότητα η συμπεριφορά των κινούμενων ρευστών διαφέρει πολύ ή λίγο από τη συμπεριφορά των ιδανικών ρευστών. Για να διακρίνουμε τα υπαρκτά ρευστά από τα ιδανικά θα τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά.** Τα πραγματικά ρευστά είναι πρακτικά ασυμπίεστα αλλά δεν ικανοποιούν τις άλλες δύο ιδιότητες των ιδανικών ρευστών.

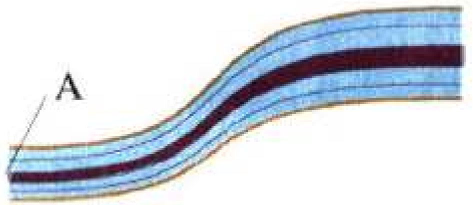
Ρευματικές γραμμές - Φλέβα - Παροχή

Το σύνολο των θέσεων από τις οποίες περνά κάθε μόριο του ρευστού στη διάρκεια της κίνησής του ορίζει μια γραμμή που την ονομάζουμε **ρευματική γραμμή.** Εφόσον η ρευματική γραμμή είναι στην πραγματικότητα η τροχιά του μορίου, η ταχύτητά του σε κάθε θέση θα είναι εφαπτομένη της ρευματικής γραμμής πράγμα που σημαίνει ότι δύο ρευματικές γραμμές δεν είναι δυνατόν να τέμνονται (σχήμα 3.9).

Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Α κάθετη στη διεύθυνση του σωλήνα , μέσα στον οποίο κινείται ένα ρευστό και από κάθε σημείο του περιγράμματος της Α σχεδιάσουμε την αντίστοιχη ρευματική γραμμή μέσα στο ρευστό σχηματίζεται ένας νοητός σωλήνας που ονομάζεται **φλέβα** (σχήμα 3.10).
Όπως φαίνεται από τον ορισμό της το ρευστό που κυλάει σε κάποια φλέβα δεν αναμιγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του σωλήνα.



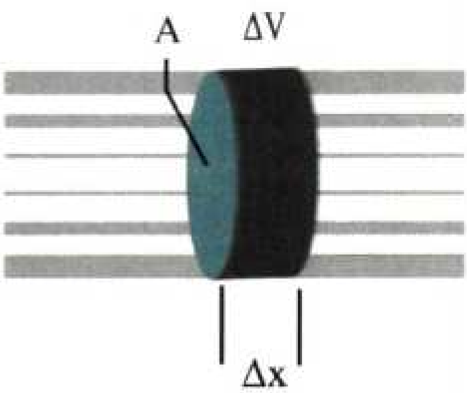
Σχήμα 3.9



Σχήμα 3.10

Ως σωλήνες θεωρούμε κάθε μορφής τοιχώματα, πραγματικά ή νοητά που περιορίζουν το κινούμενο ρευστό. Για παράδειγμα σωλήνες μπορούν να θεωρηθούν η κοίτη και τα πλευρικά τοιχώματα στη ροή των ποταμών ή οι κοιλάδες στην κίνηση των ανέμων.

Από μια διατομή του σωλήνα ή της φλέβας σε χρόνο Δt περνάει ένας όγκος υγρού ΔV. Το πηλίκο $\Pi = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ (3.6) ονομάζεται **παροχή** του σωλήνα ή της φλέβας και μετριέται σε m^3/s.



Σχήμα 3.11

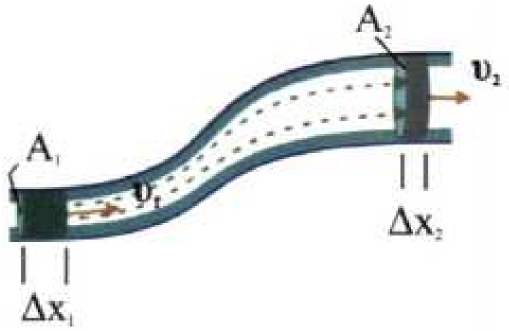
Αν η διατομή του σωλήνα έχει εμβαδόν Α και το υγρό στο χρονικό διάστημα Δt έχει μετατοπιστεί κατά Δx (σχήμα 3.6), μπορούμε να γράψουμε ΔV=Α.Δx (3.11). Αντικαθιστώντας την (3.7) στην (3.6) προκύπτει ότι Π=Α.Δx/Δt και επειδή το πηλίκο Δx/Δt ισούται με την ταχύτητα του υγρού στη θέση αυτή θα έχουμε:

$$\mathbf{Π=A.υ} \qquad (3.8)$$

Δηλαδή **η παροχή σωλήνα ή φλέβας σε κάποια θέση είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή.**

3.4 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΥΛΗΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό που ρέει μέσα σε έναν σωλήνα μεταβλητής διατομής (σχ. 3.12).



Σχήμα 3.12

Υποθέτουμε ότι η ροή είναι στρωτή. Επειδή το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο θα πρέπει η μάζα $Δm_1$ που περνάει από μία διατομή εμβαδού A_1 του σωλήνα σε χρόνο $Δt$, να είναι ίση με τη μάζα $Δm_2$ που περνάει στο ίδιο χρονικό διάστημα από μία άλλη διατομή του σωλήνα εμβαδού A_2. Είναι δηλαδή:

$$Δm_1=Δm_2 \text{ ή } ρ.ΔV_1=ρ.ΔV_2 \qquad (3.9)$$

αφού το υγρό είναι ασυμπίεστο και η πυκνότητά του είναι σταθερή. Όμως αν υποθέσουμε ότι σε χρόνο Δt οι μάζες μετατοπίζονται κατά $Δx_1$ και $Δx_2$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι:

$$ΔV_1=A_1.Δx_1 \qquad \text{και} \qquad ΔV_2=A_2.Δx_2$$

οπότε η σχέση (3.9) γίνεται:

$$ρ.A_1.Δx_1=ρ.A_2.Δx_2 \qquad \text{ή} \qquad ρ.A_1.υ_1.Δt_1=ρ.A_2.υ_2.Δt_2$$

διότι προφανώς $Δx_1=υ1.Δt_1$ και $Δx_2=υ_2.Δt_2$

Αν λάβουμε υπόψιν ότι τα υγρά είναι ασυμπίεστα και ότι $Δt_1=Δt_2$ καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση:

$$\mathbf{A_1.υ_1=A_2.υ_2} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{Π_1=Π_2} \quad \text{δηλαδή} \quad \mathbf{Π=σταθερό} \qquad (3.10)$$

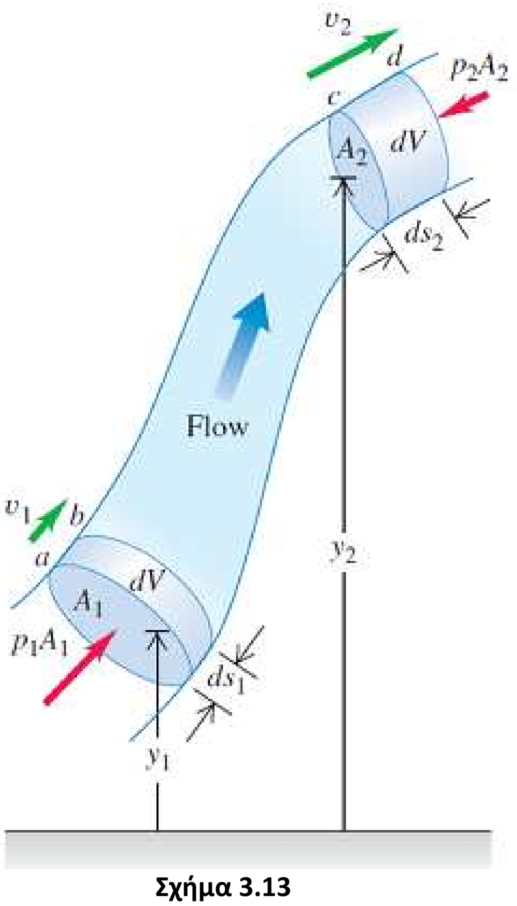
εξίσωση γνωστή ως **εξίσωση συνέχειας,** η οποία ουσιαστικά μας πληροφορεί ότι η παροχή του υγρού είναι σταθερή. **Η εξίσωση της συνέχειας αποτελεί άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης.**
Η σχέση (3.9) ισχύει για σωλήνα αλλά και για φλέβα και διατυπώνεται ως εξής:

Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μιας φλέβας η παροχή διατηρείται σταθερή.

Από τη σχέση (3.10) φαίνεται ότι κατά μήκος ενός σωλήνα που δεν έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα του υγρού δεν είναι παντού ίδια. Σε σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη. Κατά μήκος ενός ποταμού με σταθερό πλάτος πολλές φορές το βάθος ποικίλει. Όπου το ποτάμι έχει μικρό βάθος έχει και μικρή εγκάρσια διατομή. Επειδή η παροχή είναι σταθερή, στις περιοχές όπου το ποτάμι είναι ρηχό το νερό κυλάει γρηγορότερα. Παραστατικά μπορούμε να πούμε ότι εκεί που οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη.

3.5 Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ BERNOULLI

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός ρευστού που ρέει μέσα σε ένα σωλήνα είναι, εν γένει, διαφορετική ανάμεσα σε δύο σημεία που έχουν υψομετρική διαφορά. Το νερό στις βρύσες του πέμπτου ορόφου έχει μικρότερη πίεση από το νερό στις βρύσες του ισογείου.
Σε ένα σωλήνα που η διατομή του δεν είναι παντού ίδια, η ταχύτητα του υγρού μεταβάλλεται (εξίσωση της συνέχειας). Δηλαδή μια μικρή μάζα Δm του υγρού σε άλλες περιοχές του σωλήνα επιταχύνεται και σε άλλες επιβραδύνεται. Στις περιπτώσεις αυτές η συνολική δύναμη που δέχεται αυτή η μάζα από το περιβάλλον υγρό δεν είναι μηδενική και κατά συνέπεια η πίεση δε μπορεί να είναι ίδια σε όλες τις περιοχές του σωλήνα. Το 1738 ο Ελβετός Daniel Bernoulli βρήκε μια σχέση που συνδέει την πίεση με την ταχύτητα και με το ύψος.



Σχήμα 3.13

Έστω ότι έχουμε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής μέσα στον οποίο ρέει ένα ασυμπίεστο ρευστό (σχήμα 3.13**)**. Θα εξετάσουμε την πίεση σε δύο σημεία Β, Γ, του σωλήνα. Το σημείο Β βρίσκεται σε ύψος y_1 από το έδαφος και ο σωλήνας έχει στην περιοχή του Β διατομή A_1. Η πίεση του ρευστού στο Β είναι P_1. Το σημείο Γ βρίσκεται σε ύψος y_2 από το έδαφος, η διατομή του σωλήνα εκεί είναι A_2 και η πίεση P_2. Αν θεωρήσουμε σαν σύστημα το ρευστό από το Β μέχρι το Γ, βλέπουμε ότι δέχεται από το υπόλοιπο ρευστό μια δύναμη $F_1=P_1.A_1$ στην περιοχή του Β και μια δύναμη, την $F_2=P_2.A_2$ στην περιοχή του Γ, με φορά αντίθετη από τη φορά της $P_1.A_1$.

Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού όγκου ΔV και μάζας Δm στην περιοχή του Β μετατοπίζεται κατά $\mathbf{\Delta s_1}$ ενώ ένα αντίστοιχο τμήμα του ρευστού ίσης μάζας, άρα και όγκου, στην περιοχή του Γ μετατοπίζεται κατά $\mathbf{\Delta s_2}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-ενέργειας για την στοιχειώδη μάζα Δm σε αυτό το χρονικό διάστημα Δt θα έχουμε:

$$W+W_B=\Delta K \qquad (3.11)$$

Όμως το έργο που προσφέρεται στην στοιχειώδη μάζα του ρευστού από το περιβάλλον ρευστό είναι θετικό από την δύναμη F_1 και αρνητικό από την δύναμη F_2:

$$W=F_1.\Delta s_1-F_2.\Delta s_2= P_1.A_1.\Delta s_1-P_2.A_2.\Delta s_2=(P_1-P_2).\Delta V \qquad (3.12)$$

διότι $A_1.\Delta s_1=A_2.\Delta s_2=\Delta V$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το έργο του βάρους θα είναι:

$$W_B=-\Delta m.g.(y_2-y_1)=-\rho.\Delta V.g.(y_2-y_1) \qquad (3.13)$$

ενώ η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα είναι:

$$\Delta K=(1/2).\Delta m.\upsilon_2^2-(1/2).\Delta m.\upsilon_1^2=(1/2).\rho.\Delta V.(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2) \qquad (3.14)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 3.11, 3.12, 3.13 και 3.14 θα έχουμε:

$$(P_1-P_2).\Delta V-\rho.\Delta V.g.(y_2-y_1)=(1/2).\rho.\Delta V.(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2) \qquad ή$$

$$P1+(1/2).\rho.\upsilon_1^2+\rho.g.y_1= P_2+(1/2).\rho.\upsilon_2^2+\rho.g.y_2 \qquad ή$$

$$\mathbf{P+\frac{1}{2}.\rho.\upsilon^2+\rho.g.y=σταθερό} \qquad (3.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση (3.15) ονομάζεται **εξίσωση Bernoulli** και αποτελεί προφανώς άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας στην κίνηση των ρευστών. Μας πληροφορεί ότι:

το άθροισμα της πίεσης (P), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ((1/2).ρ.υ²) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, έχει σταθερή τιμή σε κάθε σημείο μιας ρευματικής γραμμής ενός ρευστού.

Προφανώς ο σωλήνας αν είναι οριζόντιος, δεν υπάρχει μεταβολή στην δυναμική ενέργεια κατά την κίνηση του ρευστού, επομένως η σχέση (3.15) παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{P+\frac{1}{2}\rho.\upsilon^2=σταθερό} \qquad (3.16)$$

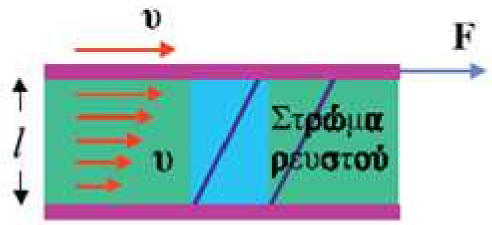
δηλαδή ***στις περιοχές που πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές, δηλαδή μικραίνει η διατομή του σωλήνα, η ταχύτητα ροής αυξάνει ή δε πίεση μειώνεται.***

3.6 Η ΤΡΙΒΗ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ - ΙΞΩΔΕΣ

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι τα ρευστά ρέουν χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής στο εσωτερικό τους, δηλαδή δυνάμεις που να αντιτίθενται στην κίνηση ενός τμήματος του ρευστού ως προς ένα άλλο τμήμα του. Στα πραγματικά ρευστά οι δυνάμεις αυτές υπάρχουν κι έχουν πολύ σημαντικές πρακτικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στη λίπανση των τμημάτων μιας μηχανής που θα ήταν αδύνατη αν το λιπαντικό δεν παρουσίαζε κατά τη ροή του τέτοιες δυνάμεις.

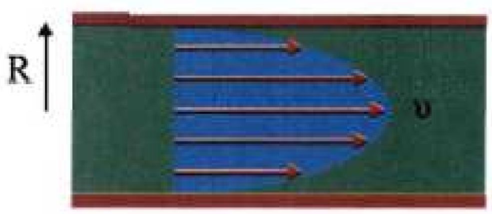
Η εσωτερική τριβή μέσα σ' ένα ρευστό ονομάζεται ιξώδες.

Ας θεωρήσουμε δύο γυάλινες οριζόντιες πλάκες εμβαδού Α όπως στο σχήμα 3.14. Σταθεροποιούμε την κάτω πλάκα και απλώνουμε πάνω της ένα στρώμα από μέλι πάχους l. Στη συνέχεια τοποθετούμε τη δεύτερη πλάκα πάνω στο μέλι και τη μετακινούμε με σταθερή ταχύτητα *υ* σε σχέση με την κάτω ακίνητη πλάκα. Διαπιστώνουμε ότι για να συνεχιστεί η κίνηση απαιτείται να ασκηθεί κάποια δύναμη F. Η δύναμη αυτή απαιτείται για να αντισταθμίσει τις τριβές (ιξώδες), που αναπτύσσονται μεταξύ των στρωμάτων του μελιού που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο.



Σχήμα 3.14

Βλέπουμε ότι το ανώτερο στρώμα έχει προσκολληθεί στην πάνω πλάκα και κινείται με ταχύτητα *υ* ενώ το κατώτερο έχει προσκολληθεί στην κάτω πλάκα και παραμένει ακίνητο. Όλα τα ενδιάμεσα στρώματα έχουν ταχύτητες διαφορετικές μεταξύ τους, που αυξάνουν σταδιακά από 0 έως υ καθώς πηγαίνουμε από την κάτω πλάκα προς την πάνω. Το διάγραμμα των ταχυτήτων για ρευστό που ρέει σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R απεικονίζεται στο σχήμα 3.15.



Σχήμα 3.15

Εάν αντικαταστήσουμε το μέλι με ένα άλλο ρευστό που ρέει ευκολότερα, για παράδειγμα το λάδι, διαπιστώνουμε ότι η δύναμη που πρέπει να ασκούμε στην πάνω πλάκα για να διατηρείται η ταχύτητά της σταθερή είναι μικρότερη. Επίσης η δύναμη είναι μικρότερη εάν, για το ίδιο ρευστό, μεταξύ των πλακών αυξήσουμε το πάχος του l. Αντίθετα η δύναμη γίνεται μεγαλύτερη αν οι επιφάνειες των πλακών είναι μεγαλύτερες ή αν επιχειρήσουμε να μετακινήσουμε την πάνω πλάκα με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Αποδεικνύεται λοιπόν ότι το μέτρο της δύναμης που απαιτείται ώστε η πάνω πλάκα στο σχήμα 3.9 να κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή το μέτρο της εσωτερικής τριβής δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{F = n.A.\frac{\upsilon}{l}} \qquad (3.17)$$

όπου **n** είναι ο συντελεστής ιξώδους, ο οποίος εξαρτάται από την φύση του ρευστού και ο οποίος στο S.I. μετριέται σε $N.s/m^2$, ενώ στην πράξη συνήθως μετριέται σε **poise (πουάζ)** όπου 1 P=1 $dyn.s/cm^2$.
Πρέπει να πούμε ότι δεν υπακούουν όλα τα ρευστά στην εξίσωση (3.17). Δεν υπάρχει σε όλα τα ρευστά γραμμική αναλογία ανάμεσα στην εσωτερική τριβή που παρουσιάζουν κατά τη ροή τους και την ταχύτητα ροής. Τα ρευστά που υπακούουν στην σχέση (3.17) τα ονομάζουμε **νευτώνεια ρευστά.**
Το αίμα παρουσιάζει κάποια ενδιαφέρουσα ιδιαιτερότητα. Το αίμα είναι ένα αιώρημα στερεών σωματιδίων μέσα σε υγρό. Καθώς αυξάνει η ταχύτητα ροής, για να μην αυξηθούν υπέρμετρα οι εσωτερικές τριβές, τα σωματίδια παραμορφώνονται και προσανατολίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνουν τη ροή.

Ακολουθεί πίνακας με τους συντελεστές ιξώδους για διάφορα ρευστά.

Ρευστό	θ (°C)	Συντελεστής Ιξώδους η (Ns/m^2)
Νερό	20	$1,0\times10^{-3}$
Νερό	100	$0,3\times10^{-3}$
Αίμα	37	$2,7\times10^{-3}$
Γλυκερίνη	20	830×10^{-3}
Μηχανέλαιο (δεκάρι)	30	250×10^{-3}

Σχήμα 3.16