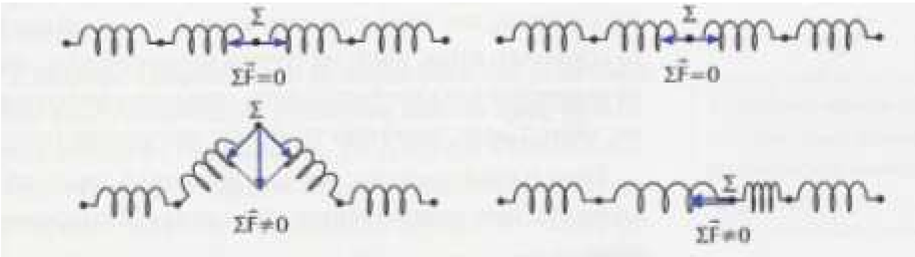
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΚΥΜΑΤΑ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κύμα ονομάζεται μια ***διαταραχή*** που διαδίδεται στον χώρο. Στην περίπτωση *των μηχανικών κυμάτων, των κυμάτων δηλαδή που διαδίδονται μέσα στην ύλη (σε ελαστικά μέσα)*, η διαταραχή δημιουργείται σε ένα σημείο της ύλης και στην συνέχεια κάθε μόριο εκτρέπει το επόμενο από την θέση ισορροπίας του ενώ το ίδιο επανέρχεται από το επόμενο στην θέση ισορροπίας του, διότι μεταξύ τους ασκούνται ελαστικές δυνάμεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1

Γενικά ***ελαστικό μέσο*** ονομάζεται κάθε υλικό μέσο που για λόγους απλότητας δεχόμαστε ότι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Αποτελείται από σωματίδια, τα οποία πληρούν το μέσο χωρίς κενά.
- Τα σωματίδια αυτά συνδέονται μεταξύ τους με ελαστικές δυνάμεις.

Για να δημιουργηθεί ένα κύμα χρειάζεται μια ***πηγή***, δηλαδή την αιτία η οποία θα προκαλέσει την διαταραχή στο ελαστικό μέσο. Αν η πηγή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τότε θα έχουμε απλό αρμονικό κύμα, ενώ αν η πηγή εκτελεί απλώς περιοδική κίνηση, θα έχουμε απλώς περιοδικό κύμα. ***Περίοδος (Τ)*** του κύματος ονομάζεται η περίοδος ταλάντωσης της πηγής ή αλλιώς ο χρόνος μέσα στον οποίο ολοκληρώνεται η πλήρης κίνηση ενός μορίου του ελαστικού μέσου. ***Συχνότητα (f)*** ενός κύματος ονομάζεται ο αριθμός των πλήρων ταλαντώσεων της πηγής στη μονάδα του χρόνου ή αλλιώς ο αριθμός των κυμάτων στην μονάδα του χρόνου. Για την περίπτωση κύματος που διαδίδεται χωρίς απώλειες ενέργειας, κάθε σημείο του κύματος ταλαντώνεται με πλάτος ίσο με το πλάτος ταλάντωσης της πηγής, το οποίο ονομάζεται **πλάτος** του κύματος. ***Με κάθε κύμα μεταφέρεται ενέργεια και ορμή και όχι ύλη.***

Για την ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος η οποία είναι σταθερή ισχύει:

$$\upsilon = \frac{x}{t} \qquad (2.1)$$

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης.

Τα κύματα με κριτήριο την διεύθυνση κίνησης των μορίων διακρίνονται σε ***εγκάρσια και διαμήκη.***

Εγκάρσια ονομάζονται τα κύματα, κάθε σημείο των οποίων ταλαντώνεται σε διεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στα κύματα αυτά εμφανίζονται όρη και κοιλάδες. Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά και στην επιφάνεια των υγρών (π.χ. θάλασσα).

Διαμήκη ονομάζονται τα κύματα, κάθε σημείο των οποίων ταλαντώνεται σε διεύθυνση παράλληλη στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στα διαμήκη κύματα εμφανίζονται πυκνώματα και αραιώματα. Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται σε όλα τα ελαστικά μέσα, στερεά, υγρά και αέρια.

Στο ίδιο ελαστικό μέσο τα διαμήκη κύματα διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από τα εγκάρσια.

Μήκος κύματος (λ) ονομάζεται η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου. Επομένως:

$$\upsilon = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} \Leftrightarrow \upsilon = \lambda . f \qquad (2.2)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την <u>θεμελιώδη κυματική εξίσωση</u> και με δεδομένο ότι η ταχύτητα διάδοσης σε δεδομένο ελαστικό μέσο είναι σταθερή προκύπτει ότι το μήκος και η συχνότητα ενός κύματος που διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο μεταβάλλονται αντιστρόφως ανάλογα.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Μήκος κύματος βέβαια ονομάζουμε και την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά όρη ή κοιλάδες ή πυκνώματα ή αραιώματα.

2. Με τον όρο **διαταραχή** που έχει γενική σημασία μπορεί να εννοούμε τη μεταβολή διαφόρων φυσικών μεγεθών, όπως την:

i) απομάκρυνση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου από την θέση ισορροπίας,

ii) μεταβολή της πίεσης ή της πυκνότητας του αέρα ή γενικότερα του μέσου διάδοσης (στο ηχητικό κύμα),

iii) μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου (στο ηλεκτρομαγνητικό κύμα).

3. Γενικότερα μια περιοχή ενός υλικού σώματος θεωρείται **ελαστική (ελαστικό μέσο)** όταν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

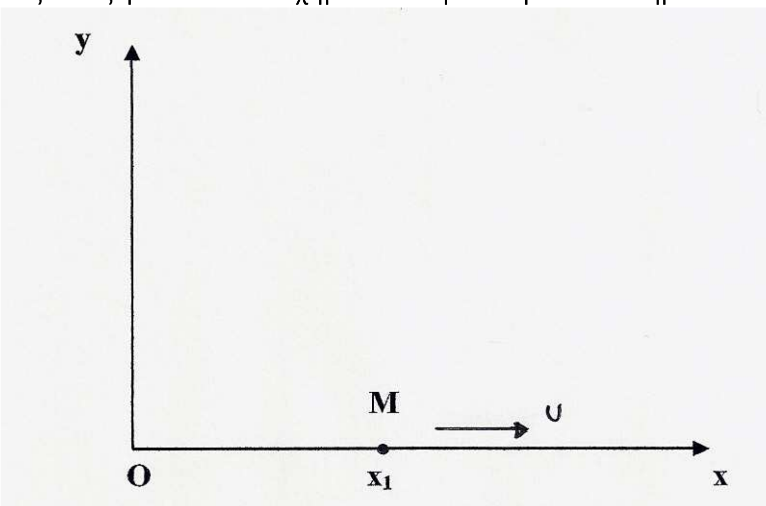
i) αποτελείται από ένα συνεχές σύνολο υλικών σημείων,

ii) είναι ισότροπη, δηλαδή εμφανίζει προς όλες τις κατευθύνσεις τις ίδιες ιδιότητες,

iii) τα υλικά σημεία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ελαστικές δυνάμεις.

<u>2.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΜΑΤΟΣ</u>

Έστω ένα απλό αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ. Έστω Ο η πηγή του κύματος όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2 στην θέση x=0 και σημείο Μ στην θέση x_1.



Σχήμα 2.2

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της πηγής θα είναι **y=Α.ημωt**, αφού θεωρούμε ότι την χρονική στιγμή t=0 η πηγή βρίσκεται στην θέση ισορροπίας και αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση.

Το σημείο Μ αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από χρόνο $\mathbf{t_1 = \frac{x_1}{\upsilon}}$, από την στιγμή που άρχισε η ταλάντωση της πηγής, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ που θα ταλαντώνεται για χρόνο $t-t_1$, θα είναι $y=A.\eta\mu[\omega.(t-t_1)]$. Επομένως θα έχουμε:

$$y = A.\eta\mu\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x_1}{\upsilon}) \Leftrightarrow y = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\upsilon.T}) \Leftrightarrow y = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\upsilon})$$

Γενικεύοντας για κάθε σημείο στην θέση x την χρονική στιγμή t θα έχουμε:

$$\mathbf{y = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})} \qquad (2.3)$$

Η σχέση (2.3) αποτελεί την ***εξίσωση του κύματος.***
Ως φάση του κύματος θεωρούμε την ποσότητα:

$$\mathbf{\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})} \qquad (2.4)$$

Από την εξίσωση (2.3) προκύπτει:

Εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης:

$$\mathbf{v = \omega.A.\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})} \qquad (2.5)$$

Εξίσωση επιτάχυνσης:

$$\mathbf{\alpha = -\omega^2.A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = -\omega^2.y} \qquad (2.6)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Η ποσότητα $\mathbf{\frac{2.\pi}{\lambda}}$ ονομάζεται **κυματικός αριθμός** και συμβολίζεται με **k.** Επομένως η κυματική εξίσωση πολλές φορές εμφανίζεται με τη μορφή:

$$\mathbf{y = A.\eta\mu(\omega.t - k.x)} \qquad (2.7)$$

2. Αν το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά τότε η εξίσωση του κύματος τροποποιείται ως εξής:

$$\mathbf{y = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})} \qquad (2.8)$$

διότι το σημείο Μ ταλαντώνεται για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ότι το σημείο Ο. Ανάλογα τροποποιούνται και οι εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης.

3. Η κυματική εξίσωση είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών της μορφής y=f(x,t). Γίνεται όμως συνάρτηση μιας μεταβλητής αν:

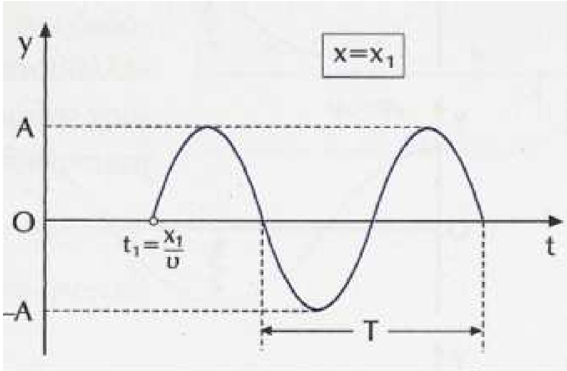
i) Έχουμε ένα συγκεκριμένο σημείο σε θέση $x=x_1$ οπότε θα έχουμε την εξίσωση της Α.Α.Τ. του σημείου, δηλαδή μια συνάρτηση της μορφής y=f(t) ή $\mathbf{y = A.\eta\mu(\frac{2.\pi.t}{T} - \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o})}$ (2.9)

ii) Έχουμε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t=t_1$ οπότε θα έχουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος, δηλαδή μια συνάρτηση της μορφής y=f(x) ή $\mathbf{y = A.ημ(σταθερό - \frac{2.π.x}{λ})}$ (2.10)

Γραφικά θα έχουμε:

α. Διάγραμμα y=f(t) για δεδομένο σημείο στην θέση $x=x_1$ (Γραφική παράσταση ταλάντωσης δεδομένου σημείου).

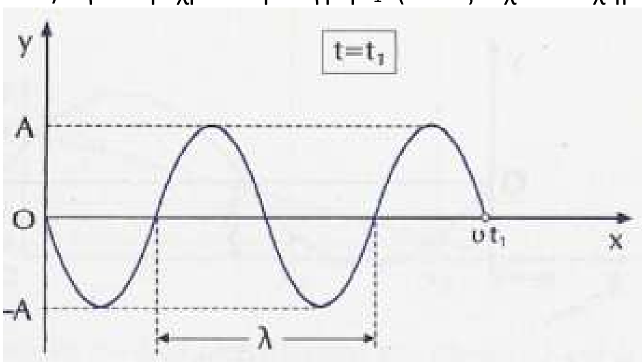
Βρίσκουμε για το κύμα την χρονική στιγμή $t_1=x_1/υ$, κατά την οποία το κύμα φτάνει στο σημείο αυτό, δηλαδή την χρονική στιγμή κατά την οποία αρχίζει η ταλάντωση του σημείου και στην συνέχεια σχεδιάζουμε γραφική παράσταση απομάκρυνσης- χρόνου όπως για μια ταλάντωση, αλλά που να ξεκινά από αυτή την χρονική στιγμή (t_1) και μετά. (Όπως π.χ. στο σχήμα 2.3 που ακολουθεί)



Σχήμα 2.3

β. Διάγραμμα y=f(x) (ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ του κύματος) για δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$.

Βρίσκουμε την θέση $x_1=υ.t_1$ μέχρι την οποία το κύμα έχει φτάσει την χρονική στιγμή t_1 (με δεδομένο ότι την χρονική στιγμή t=0 το κύμα βρίσκεται στην θέση x=0) και στην συνέχεια σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο, βρίσκοντας από την εξίσωση 2.10 τις απομακρύνσεις των σημείων στις θέσεις x=0 και x=λ/4 για την χρονική στιγμή t_1. (Όπως π.χ. στο Σχήμα 2.4)



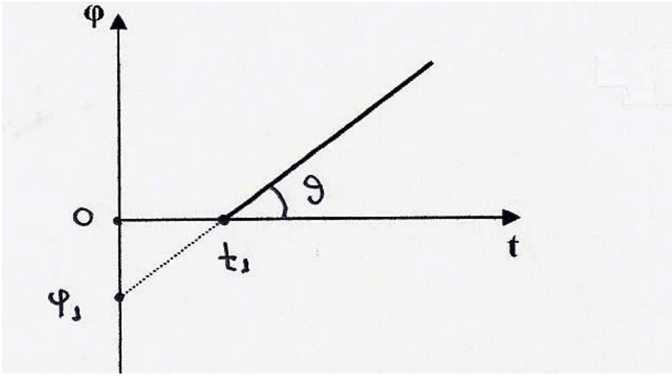
Σχήμα 2.4

γ. Διάγραμμα φ=f(t) (φάσης-χρόνου) για σημείο σε δεδομένη θέση $x=x_1$.

Από την σχέση (2.4), για σημείο σε δεδομένη θέση $x=x_1$ η φάση μπορεί να γραφεί συναρτήσει του χρόνου ως:

$$φ = \frac{2π}{T}.t - \frac{2πx_1}{λ}$$

δηλαδή η φάση είναι αύξουσα γραμμική συνάρτηση του χρόνου οπότε το αντίστοιχο διάγραμμα θα είναι:



Σχήμα 2.5

όπου για t=0 έχουμε $\phi_1=-\frac{2\pi x_1}{\lambda}$ και για φ=0 έχουμε $t_1=\frac{x_1.T}{\lambda}$ (σημεία τομής με τους άξονες).

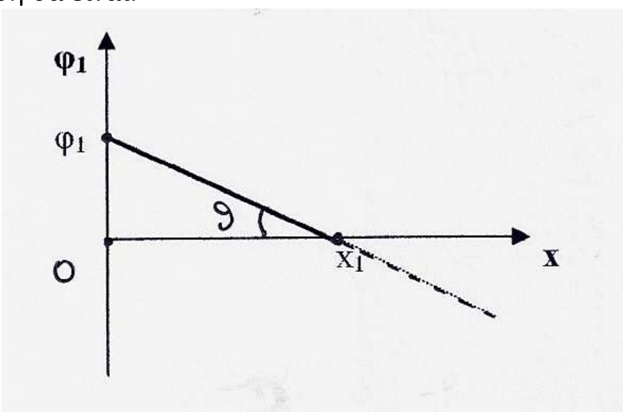
(Ουσιαστικά βέβαια η γραφική παράσταση ξεκινά την χρονική στιγμή t_1 γιατί αρνητική φάση δεν έχει νόημα, αφού αναφέρεται σε στιγμές που το σημείο στην θέση x_1 είναι ακίνητο).

δ. Διάγραμμα φ=f(x) (φάσης-θέσης) για δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$.

Από την σχέση (2.4) για δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$ η συνάρτηση της φάσης με τη γίνεται:

$$\phi=-\frac{2\pi}{\lambda}.x+\frac{2\pi t_1}{T}$$

δηλαδή η φάση είναι φθίνουσα γραμμική συνάρτηση της θέσης και επομένως η αντίστοιχη γραφική παράσταση θα είναι:



Σχήμα 2.6

όπου για x=0 έχουμε $\phi_1=\frac{2\pi t_1}{T}$ και για φ=0 έχουμε $x_1=\frac{\lambda.t_1}{T}$ (σημεία τομής με τους άξονες).

(Ουσιαστικά η γραφική παράσταση ολοκληρώνεται στην θέση x_1 γιατί αρνητική φάση δεν έχει νόημα αφού αναφέρεται θέσεις που το κύμα δεν έχει ακόμα φτάσει).

ε. Διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων στις θέσεις x_1 και x_2 την χρονική στιγμή $t=t_1$.

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\left(\frac{2\pi t_1}{T}-\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right)-\left(\frac{2\pi t_1}{T}-\frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)=\frac{2\pi}{\lambda}(x_1-x_2)\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}.\Delta x} \text{ ή } \boldsymbol{|\Delta\varphi|=\frac{2\pi}{\lambda}.\Delta x} \qquad (2.11)$$

Παρατηρούμε ότι σημεία τα οποία απέχουν μεταξύ τους ακέραιο πολλαπλάσιο του ενός μήκους κύματος (Δx=κ.λ) βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης (δηλ. Δφ=κ.2π)**, επομένως την ίδια χρονική στιγμή έχουν ***ίδιες απομακρύνσεις από την Θ.Ι. και ίδιες ταχύτητες ταλάντωσης,*** ενώ σημεία που απέχουν περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος (Δx=(2κ+1).λ/2) βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης (δηλ. Δφ=(2κ+1).π),** επομένως την ίδια χρονική στιγμή έχουν ***αντίθετες απομακρύνσεις από την Θ.Ι. και αντίθετες ταχύτητες ταλάντωσης.***

στ. Διαφορά φάσης ενός σημείου στην θέση $x=x_1$ μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2.

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\left(\frac{2\pi t_2}{T}-\frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)-\left(\frac{2\pi t_1}{T}-\frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)=\frac{2\pi}{T}(t_2-t_1)\Rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi=\frac{2\pi}{T}.\Delta t} \quad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο σε δύο χρονικές στιγμές οι οποίες απέχουν μεταξύ τους ακέραιο πολλαπλάσιο της μιας περιόδου (Δt=κ.T) **έχει την ίδια φάση (αφού Δφ=κ.2π) άρα την ίδια απομάκρυνση και ταχύτητα ταλάντωσης**, ενώ σε δύο χρονικές στιγμές που απέχουν περιττό πολλαπλάσιο της μισής περιόδου (Δt=(2κ+1).T/2) βρίσκεται σε **αντίθεση φάσης (δηλ. Δφ=(2κ+1).π) άρα έχει αντίθετες απομακρύνσεις και ταχύτητες ταλάντωσης**.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Αν το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά τότε προφανώς θα έχουμε την σχέση (2.4) να γράφετε:

$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}.x+\frac{2\pi}{T}.t \quad (2.13)$$

δηλαδή η φάση είναι αύξουσα γραμμική συνάρτηση του χρόνου και η αντίστοιχη γραφική παράσταση (σχήμα 2.6) θα είναι αύξουσα.

2. Η x συντεταγμένη κάθε σημείου του αρνητικού ημι-άξονα μπαίνει πάντα με το πρόσημό της στις εξισώσεις. Άρα **το κύμα διαδίδεται πάντα από σημεία με μεγαλύτερη φάση σε σημεία με μικρότερη,** αφού:

i) Αν το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, για μια δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$ και για δύο σημεία Μ και Ν στις θέσεις $x_N>x_M$ η σχέση (2.4) δίνει $\varphi_N<\varphi_M$. Όμως αφού το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατευθύνεται από το σημείο Μ στο σημείο Ν, δηλαδή από το σημείο με την μεγαλύτερη φάση, στο σημείο με την μικρότερη.

ii) Αν το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά, για μια δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$ και για δύο σημεία Μ και Ν στις θέσεις $x_M>x_N$ η σχέση (2.13) δίνει $\varphi_N<\varphi_M$. Όμως αφού το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά κατευθύνεται από το σημείο Μ στο σημείο Ν, δηλαδή πάλι από το σημείο με την μεγαλύτερη φάση, στο σημείο με την μικρότερη.

3. Ένα κύμα μπορεί να έχει αρχική φάση, δηλαδή να έχει εξίσωση της μορφής:

$$y=A.\eta\mu\left(\frac{2.\pi.t}{T}\pm\frac{2.\pi.x}{\lambda}+\varphi_o\right) \quad (2.14)$$

κάτι που σημαίνει ότι η πηγή την χρονική στιγμή t=0 δεν βρίσκεται στην θέση ισορροπίας κινούμενη προς την θετική κατεύθυνση ή το μέτωπο του κύματος εκείνη τη χρονική στιγμή βρίσκεται πέρα από την θέση x=0.

4. Στο μέτωπο ενός κύματος, το πρώτο σημείο κατά την διάδοση του κύματος έχει αρχική φάση 0 αν έχουμε όρος στο μέτωπο ή αρχική φάση π αν έχουμε κοιλάδα στο μέτωπο.

2.3 ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ

Συμβολή δύο ή περισσοτέρων κυμάτων ονομάζεται η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου, ανεξάρτητα το ένα απ' τα άλλα.

Η μόνη περίπτωση που η διάδοση ενός κύματος μπορεί να επηρεάσει την διάδοση των υπολοίπων, είναι όταν το κύμα αυτό έχει πολύ μεγάλο πλάτος και μεταβάλλει τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης.

Όταν σε μια περιοχή του χώρου συμβάλλουν δύο ή περισσότερα κύματα, η απομάκρυνση των σημείων του μέσου κάθε χρονική στιγμή είναι η συνισταμένη των απομακρύνσεων από τα επιμέρους κύματα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αρχή της επαλληλίας ή υπέρθεσης.**

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Δύο πηγές κυμάτων ονομάζονται **σύμφωνες** όταν έχουν διαρκώς την ίδια διαφορά φάσης.
2. Δύο πηγές κυμάτων ονομάζονται **σύγχρονες** όταν έχουν διαρκώς την ίδια φάση.

Διάδοση κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

Έστω στην επιφάνεια ενός υγρού δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ από τις οποίες ξεκινούν κύματα ίδιου πλάτους, τα οποία συμβάλλουν σε σημείο Σ, το οποίο απέχει απόσταση r_1 από την πηγή $Π_1$ και r_2 από την πηγή $Π_2$. Οι αντίστοιχες εξισώσεις των κυμάτων στο σημείο Σ, δηλαδή οι εξισώσεις που περιγράφουν την ταλάντωση του σημείου Σ εξαιτίας κάθε κύματος ξεχωριστά θα είναι:

$$y_1 = A.ημ2π(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}) = A.ημ(\frac{2πt}{T} - \frac{2πr_1}{λ})$$
$$y_2 = A.ημ2π(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{λ}) = A.ημ(\frac{2πt}{T} - \frac{2πr_2}{λ})$$

Επομένως ως αποτέλεσμα της επαλληλίας των κυμάτων είναι το ότι η απομάκρυνση του σημείου Σ από την θέση ισορροπίας θα είναι:

$$y = y_1 + y_2 = A.[ημ(\frac{2πt}{T} - \frac{2πr_1}{λ}) + ημ(\frac{2πt}{T} - \frac{2πr_2}{λ})] \qquad (2.15)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο μετασχηματισμού του αθροίσματος ημιτόνων σε γινόμενο δηλαδή τον τύπο:

$$ημα + ημβ = 2.συν\frac{α-β}{2}.ημ\frac{α+β}{2} \qquad (1.70),$$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$y = A.2.συν\frac{\frac{2πt}{T} - \frac{2πr_1}{λ} - \frac{2πt}{T} + \frac{2πr_2}{λ}}{2}.ημ\frac{\frac{2πt}{T} - \frac{2πr_1}{λ} + \frac{2πt}{T} - \frac{2πr_2}{λ}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y = 2A.συν\frac{2π(r_2 - r_1)}{2λ}.ημ2π(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ})} \qquad (2.16)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί για κάθε σημείο, εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης με:

Πλάτος: $\mathbf{A' = 2A.\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}\right|}$ (2.17)

Κυκλική συχνότητα: $\mathbf{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ (2.18)

Αρχική φάση: $\mathbf{\varphi_o = -\frac{2\pi(r_1 + r_2)}{2\lambda}}$ (2.19)

Πάνω στην επιφάνεια του υγρού διακρίνουμε σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (σημεία ενίσχυσης) και σημεία που παραμένουν ακίνητα (σημεία απόσβεσης).

Αντίστοιχα θα έχουμε:
Εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης:

$$\mathbf{v = \omega.2A.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}.\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda})} \qquad (2.20)$$

Εξίσωση επιτάχυνσης:

$$\mathbf{\alpha = -\omega^2.2A.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda}.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}) = -\omega^2.y} \qquad (2.21)$$

<u>**Σημεία ενίσχυσης:**</u>

Είναι τα σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος Α΄=2.Α (μέγιστο) οπότε προφανώς από την σχέση (2.17) θα έχουμε:

$$\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{2\lambda}(r_2 - r_1)\right| = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{2\lambda}(r_2 - r_1) = k.\pi \Rightarrow$$

$\mathbf{r_2 - r_1 = k.\lambda}$, με $k \in Z$ ή

(2.22)

$\mathbf{|r_2 - r_1| = k.\lambda}$, με $k \in N$

<u>Δηλαδή σημεία τα οποία απέχουν από τις δύο πηγές αποστάσεις των οποίων η διαφορά είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.</u>

<u>**Σημεία απόσβεσης:**</u>

Είναι τα σημεία που παραμένουν διαρκώς ακίνητα δηλαδή έχουν πλάτος Α΄=0 (ελάχιστο) οπότε από την σχέση (2.17) θα έχουμε:

$$\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{2\lambda}(r_2 - r_1)\right| = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{2\lambda}(r_2 - r_1) = (2.k + 1).\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$\mathbf{r_2 - r_1 = (2.k + 1).\frac{\lambda}{2}}$, με $k \in Z$ ή

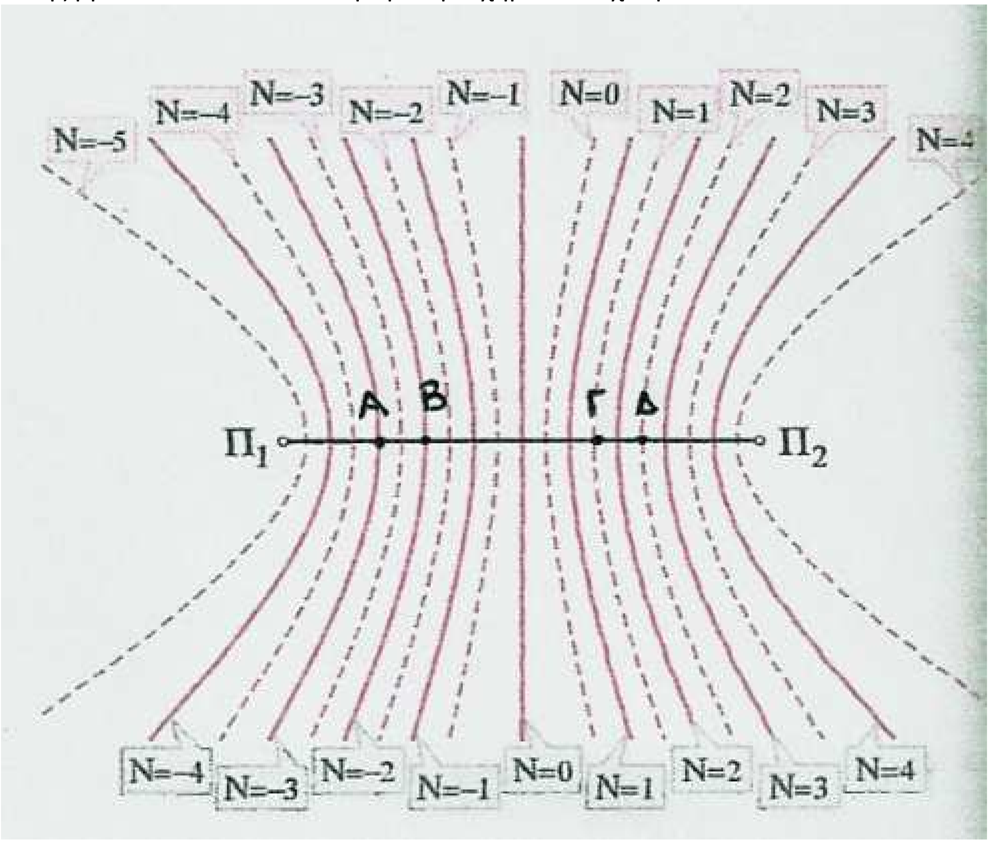
(2.23)

$\mathbf{|r_2 - r_1| = (2.k + 1).\frac{\lambda}{2}}$, με $k \in N$

<u>Δηλαδή σημεία τα οποία απέχουν από τις δύο πηγές αποστάσεις, των οποίων η διαφορά είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, παραμένουν διαρκώς ακίνητα.</u>

Τα σημεία ενίσχυσης και απόσβεσης βρίσκονται αντίστοιχα πάνω σε υπερβολές σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί και ένας ακέραιος αριθμός.

Ενδιάμεσα στα σημεία ενίσχυσης και τα σημεία απόσβεσης υπάρχουν σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος ενδιάμεσο του μηδέν και του 2.A. Όσα σημεία έχουν ίδιο πλάτος ταλάντωσης βρίσκονται πάνω σε παραβολή. Σχηματικά έχουμε:



Σχήμα 2.7

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Να σημειώσουμε ότι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ δύο διαδοχικά σημεία ενίσχυσης ή δύο διαδοχικά σημεία απόσβεσης απέχουν απόσταση **λ/2**, ενώ ένα σημείο ενίσχυσης και το επόμενο απόσβεσης απέχουν **λ/4**, όπως αποδεικνύεται ακολούθως:

- **Έστω σημεία Α και Β που βρίσκονται πάνω στις Ν και Ν+1 υπερβολές ενίσχυσης αντίστοιχα. Θα έχουμε:**
  $(\Pi_1A)-(\Pi_2A)=N.\lambda$ και
  $(\Pi_1B)-(\Pi_2B)=(N+1).\lambda$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη θα έχουμε:

$(\Pi_1B)-(\Pi_2B)-(\Pi_1A)+(\Pi_2A)=\lambda$ ή $(\Pi_1B)-(\Pi_1A)+(\Pi_2A)-(\Pi_2B)=\lambda$ ή $2.(AB)=\lambda$ ή

$$\left(\mathbf{AB}\right)=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2}}$$

- **Ομοίως έστω σημεία Γ και Δ που βρίσκονται πάνω στις Ν και Ν+1 υπερβολές απόσβεσης αντίστοιχα. Θα έχουμε:**
  $(\Pi_1\Gamma)-(\Pi_2\Gamma)=(2N+1).\lambda/2$ και
  $(\Pi_1\Delta)-(\Pi_2\Delta)=(2(N+1)+1).\lambda/2$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη θα έχουμε:

$(\Pi_1\Delta)-(\Pi_2\Delta)-(\Pi_1\Gamma)+(\Pi_2\Gamma)=\lambda$ ή $(\Pi_1\Delta)-(\Pi_1\Gamma)+(\Pi_2\Gamma)-(\Pi_2\Delta)=\lambda$ ή $2.(AB)=\lambda$ ή

$$\left(\mathbf{\Gamma\Delta}\right)=\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2}}$$

2. Η διαφορά φάσης των κυμάτων που συμβάλλουν σε ένα σημείο Σ και προέρχονται από τις σύγχρονες πηγές κυμάτων είναι:

$$\mathbf{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2.\pi}{\lambda}.(r_2 - r_1)} \qquad (2.24)$$

Η σχέση (2.17) που δίνει το πλάτος της ταλάντωσης κάθε σημείου στο οποίο συμβάλλουν τα κύματα γίνεται μέσω της σχέσης (2.24):

$$\mathbf{A' = 2.A.\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\Delta\varphi}{2}\right|} \qquad (2.25)$$

3. Για σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ αλλά εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{r_2 - r_1 = (\Pi_1\Pi_2) = d = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}} \qquad (2.26)$$

Επομένως όλα αυτά τα σημεία θα έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης που θα δίνεται από την σχέση (2.17) η οποία μέσω της (2.26) παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{A' = 2A.\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi.d}{\lambda}\right|} \qquad (2.27)$$

όπου d η απόσταση των πηγών Π_1 και Π_2. Επομένως τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ αλλά εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ θα είναι **όλα**:

i) Σημεία ενίσχυσης αν **d=k.λ** όπου k=1,2,3,........
ii) Σημεία απόσβεσης αν **d=(2.k+1).λ/2** όπου k=1,2,3,........

4. Αν οι πηγές είναι σύμφωνες και όχι σύγχρονες δηλαδή έχουν σταθερή διαφορά φάσης, θα έχουν εξισώσεις:

$$y_1 = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}) = A.\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \phi_o)$$

$$y_2 = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}) = A.\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

Επομένως ως αποτέλεσμα της επαλληλίας των κυμάτων είναι το ότι η απομάκρυνση του σημείου Σ από την θέση ισορροπίας θα είναι (γίνεται χρήση της σχέσης (2.15)):

$$y = y_1 + y_2 = A.[\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \phi_o) + \eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})] \qquad (2.28)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση 1.88 μετασχηματισμού του αθροίσματος ημιτόνων σε γινόμενο:

$$y = A.2.\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \phi_o - \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi r_2}{\lambda}}{2}.\eta\mu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \phi_o + \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y = 2A.\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda} + \frac{\varphi_o}{2}).\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} + \frac{\varphi_o}{4\pi})} \qquad (2.29)$$

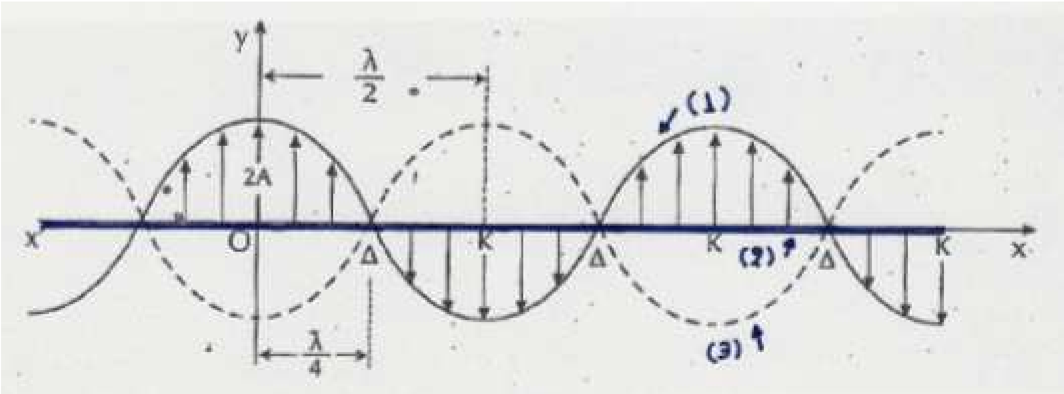
Η παραπάνω σχέση αποτελεί για κάθε σημείο, εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης με:

Πλάτος: $\mathbf{A' = 2A.\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2\lambda} + \frac{\varphi_o}{2})\right|}$ (2.29) και **Κυκλική συχνότητα:** $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (2.30)

Πάνω στην επιφάνεια του υγρού διακρίνουμε και πάλι σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (σημεία ενίσχυσης) και σημεία που παραμένουν ακίνητα (σημεία απόσβεσης) και βρίσκονται πάνω σε υπερβολές.

2.4 ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Στάσιμα κύματα ονομάζονται τα κύματα που προκύπτουν από την συμβολή δύο κυμάτων που έχουν ίσα πλάτη, συχνότητες και μήκη κύματος και διαδίδονται πάνω στην ίδια ευθεία προς αντίθετες κατευθύνσεις.



Σχήμα 2.8

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται τρία στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος. Αν το στιγμιότυπο (1) αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή t_1, το στιγμιότυπο (2) αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή t_1+T/4 και το στιγμιότυπο (3) στην χρονική στιγμή t_1+T/2.

Σε ένα στάσιμο κύμα διακρίνουμε σημεία που είναι μονίμως ακίνητα, τους ***δεσμούς*** **(Δ)** και σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, τις ***κοιλίες*** **(Κ).**

Μαθηματική περιγραφή:

Κατά την μαθηματική περιγραφή ενός στάσιμου κύματος θεωρούμε και για τα δύο διαδιδόμενα κύματα το ίδιο σημείο αναφοράς (x=0). Οι εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν θα είναι της μορφής:

$$y_1 = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \quad \text{και} \quad y_2 = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

Όταν τα κύματα συμβάλλουν η συνιστάμενη απομάκρυνση κάθε σημείου στην θέση x την χρονική στιγμή t θα είναι (με χρήση του μετασχηματισμού (1.70)):

$$y = y_1 + y_2 = A.\left[\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}) + \eta\mu(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda})\right] =$$

$$A.2.\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}}{2}.\eta\mu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y = 2.A.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}.\eta\mu\frac{2\pi t}{T}} \qquad (2.31)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση που δείχνει ότι κάθε σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο αναπτύσσεται το στάσιμο κύμα, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με:

Πλάτος: $$\mathbf{A' = 2A.\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|} \qquad (2.32)$$ και

Κυκλική συχνότητα: $$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi t}{T}} \qquad (2.33)$$

Επομένως οι εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης με τον χρόνο θα είναι:

Εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης:

$$\mathbf{v = \omega.2.A.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}} \qquad (2.34)$$

Εξίσωση επιτάχυνσης:

$$\boldsymbol{\alpha = -\omega^2.2.A.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}.\eta\mu\frac{2\pi t}{T} = -\omega^2.y} \qquad (2.35)$$

<u>Θέσεις κοιλιών:</u>

Οι κοιλίες ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος Α΄=2Α οπότε από την σχέση (2.32) θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = \kappa.\pi \Leftrightarrow \mathbf{x_K = \kappa.\frac{\lambda}{2}} \quad \text{με } \kappa \in Z. \quad (2.36)$$

<u>Θέσεις δεσμών:</u>

Οι δεσμοί παραμένουν διαρκώς ακίνητοι δηλαδή έχουν πλάτος Α΄=0 οπότε από την σχέση (2.32) θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2\kappa+1).\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x_\Delta = (2.\kappa+1).\frac{\lambda}{4}} \quad \text{με } \kappa \in Z. \quad (2.37)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Τα παραπάνω βέβαια ισχύουν για συμβολή κυμάτων με αρχική φάση φ_o=0 (ή με την ίδια αρχική φάση) οπότε με βάση την εξίσωση (2.32) στην θέση x=0 υπάρχει κοιλία. Αν στην θέση x=0 υπάρχει δεσμός τότε προφανώς οι σχέσεις (2.36) και (2.37) που δίνουν τις θέσεις δεσμών και κοιλιών θα ισχύουν αντίστροφα, δηλαδή η σχέση (2.36) θα δίνει τις θέσεις των δεσμών και η σχέση (2.37) θα δίνει τις θέσεις των κοιλιών.

Σε ένα τέτοιο αποτέλεσμα θα οδηγηθούμε π.χ. αν τα κύματα που συμβάλλουν για να δώσουν το στάσιμο κύμα έχουν διαφορά φάσης π. Πιο συγκεκριμένα αν οι εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν είναι:

$$y_1 = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2}) \quad \text{και} \quad y_2 = A.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

Όταν τα κύματα συμβάλλουν η συνιστάμενη απομάκρυνση κάθε σημείου θα είναι (με χρήση του μετασχηματισμού (1.70):

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi) + \eta\mu(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda})\right] =$$

$$A.2.\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi - \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}}{2}.\eta\mu\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi + \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y = 2.A.\sigma\upsilon\nu(-\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}).\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2})} \qquad \text{ή}$$

$$\mathbf{y = 2.A.\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}} \qquad (2.38)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης με:

Πλάτος: $\mathbf{A' = 2A.\left|\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|}$ (2.39)

Κυκλική συχνότητα: $\mathbf{\omega = \frac{2\pi t}{T}}$ (2.40)

Επομένως οι εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης με τον χρόνο θα είναι:

Εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης:

$$\mathbf{v = -\omega.2.A.\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}.\eta\mu\frac{2\pi t}{T}} \qquad (2.41)$$

Εξίσωση επιτάχυνσης:

$$\mathbf{\alpha = -\omega^2.2.A.\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T} = -\omega^2.y} \qquad (2.42)$$

<u>Θέσεις δεσμών:</u>

Οι κοιλίες ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος Α΄=2Α οπότε από την σχέση (2.39) θα έχουμε:

$$\mathbf{\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \left|\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = \kappa.\pi \Leftrightarrow x_\Delta = \kappa.\frac{\lambda}{2}} \quad \text{με } \kappa \in N. \qquad (2.43)$$

<u>Θέσεις κοιλιών:</u>

Οι δεσμοί παραμένουν διαρκώς ακίνητοι δηλαδή έχουν πλάτος Α΄=0 οπότε από την σχέση (2.39) θα έχουμε:

$$\mathbf{\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \Leftrightarrow \left|\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2\kappa + 1).\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_K = (2.\kappa + 1).\frac{\lambda}{4}} \quad \text{με } \kappa \in N. \qquad (2.44)$$

2. Δύο σημεία σε ένα στάσιμο κύμα που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών, βρίσκονται σε συμφωνία φάσης (Δφ=0), ενώ δύο σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού που απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ένα μήκος κύματος βρίσκονται σε αντίθεση φάσης (Δφ=π). Γενικότερα σε ένα στάσιμο κύμα τα σημεία μεταξύ των οποίων υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών θα βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, ενώ τα σημεία μεταξύ των οποίων υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Άλλες διαφορές φάσεων (π.χ. π/2 ή π/4) αποκλείονται, ενώ βέβαια στο στάσιμο κύμα δεν ισχύουν οι σχέσεις για την διαφορά φάσης 2.11 και 2.12.

3. Ενώ σε ένα τρέχον κύμα έχουμε μεταφορά ενέργειας σε ένα στάσιμο κύμα δεν μεταφέρεται ενέργεια αφού δεν μπορεί να περάσει από τους δεσμούς, οι οποίοι είναι διαρκώς ακίνητοι και επομένως δεν έχουν ενέργεια.

4. Για κάθε στοιχείο μάζας m του ελαστικού μέσου που διαδίδεται το στάσιμο κύμα, θα ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 + \frac{1}{2}.D.y^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

5. Η απόσταση στην διεύθυνση της χορδής, δύο διαδοχικών δεσμών ή δύο διαδοχικών κοιλιών είναι λ/2, ενώ η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της επόμενης κοιλίας είναι λ/4.

6. Σε μία χορδή μήκους L που έχει στερεωμένες τις άκρες της θα αναπτύσσσονται στάσιμα κύματα με μήκος λ και συχνότητα f. Αν συνολικά υπάρχουν στην χορδή ν δεσμοί (μαζί με τα άκρα) τότε θα αναπτυχθούν ν-1 άτρακτοι μήκους λ/2 η καθεμία οπότε:

$$L = (\nu - 1).\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2.L}{\nu - 1} \qquad (2.45)$$

Η σχέση (2.45) δίνει όλα τα διαφορετικά δυνατά μήκη κύματος που μπορούν να αναπτυχθούν στην χορδή. Το ποιο θα αναπτυχθεί εξαρτάται από την συχνότητα διέγερσης. Αφού f=υ/λ, από την σχέση (2.45) θα έχουμε:

$$f = \frac{\upsilon}{2.L}.(\nu - 1) \qquad (2.46)$$

Η σχέση (2.46) δίνει ουσιαστικά την ***συνθήκη κβάντωσης*** των συχνοτήτων που αναπτύσσσονται στην χορδή.

Αντίστοιχες σχέσεις (με ανάλογες διαδικασίες) θα έχουμε αν η χορδή που ταλαντώνεται είναι ελεύθερη στο ένα ή στα δύο άκρα της.

2.5 ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

Φαινόμενο Doppler ονομάζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο όταν μια πηγή ήχου και ένας παρατηρητής βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι διαφορετική από την συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή. Πιο συγκεκριμένα:

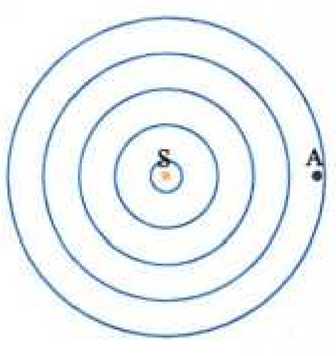
1. Όταν η πηγή και ο παρατηρητής πλησιάζουν, ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής έχει μεγαλύτερη συχνότητα από την συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή.
2. Αντίθετα όταν πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται, ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής έχει μικρότερη συχνότητα από την συχνότητα του ήχου που παράγει η πηγή.
3. Τέλος αν πηγή και παρατηρητής κινούνται χωρίς όμως η μεταξύ τους απόσταση να μεταβάλλεται τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο ίδιας συχνότητας με αυτόν που η πηγή παράγει.

Α. ΑΚΙΝΗΤΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΑΙ ΑΚΙΝΗΤΗ ΠΗΓΗ

Ας υποθέσουμε ότι πηγή S εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S και μήκους κύματος λ ενώ παρατηρητής Α, αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_A. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ως προς τον αέρα είναι υ. Πηγή και παρατηρητής είναι ακίνητοι. Γνωρίζουμε ότι η συχνότητα του ήχου δίνεται από την σχέση:

$$f = \frac{N}{t} \qquad (2.47)$$

όπου N ο αριθμός των μεγίστων του ηχητικού κύματος σε χρόνο t.



Σχήμα 2.9

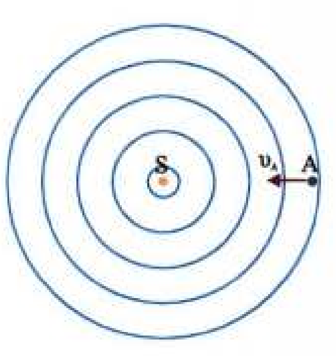
Αν πηγή-S και παρατηρητής-A είναι ακίνητα, τότε σε χρόνο t όσα μέγιστα κύματος παράγει η πηγή τόσα θα φτάνουν στον παρατηρητή οπότε:

$$\mathbf{f_S} = \mathbf{f_A} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}}{\boldsymbol{\lambda_s}} \qquad (2.48)$$

δηλαδή οι συχνότητες θα είναι ίσες.

<u>B. ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΑΙ ΑΚΙΝΗΤΗ ΠΗΓΗ</u>

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο παρατηρητής A πλησιάζει την ακίνητη πηγή S με ταχύτητα υ_A (σχήμα 2.10) ως προς το μέσο διάδοσης του ήχου (αέρα). Τότε η ταχύτητα του ήχου ως προς το μέσο διάδοσης όπως την αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι $\upsilon' = \upsilon + \upsilon_A$ (αν απομακρυνόταν θα ήταν $\upsilon - \upsilon_A$). Από την θεμελιώδη κυματική εξίσωση θα έχουμε:



Σχήμα 2.10

$$\mathbf{f_A} = \frac{\boldsymbol{\upsilon'}}{\boldsymbol{\lambda_s}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon \pm \upsilon_A}}{\boldsymbol{\lambda_s}} \qquad (2.49) \qquad \text{και}$$

$$\boldsymbol{\lambda_s} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}}{\mathbf{f_S}} \qquad (2.50)$$

Από τις σχέσεις (2.49) και (2.50) θα έχουμε:

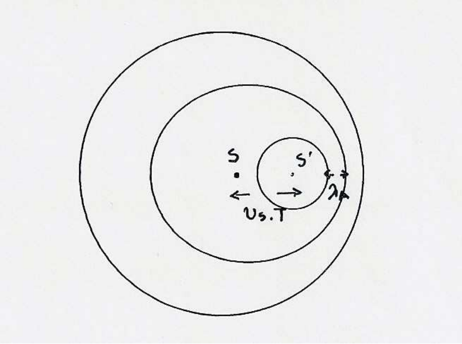
$$\mathbf{f_A} = \frac{\boldsymbol{\upsilon \pm \upsilon_A}}{\boldsymbol{\upsilon}} . \mathbf{f_S} \qquad (2.51)$$

Γ. ΑΚΙΝΗΤΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΑΙ ΚΙΝΟΥΜΕΝΗ ΠΗΓΗ

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο παρατηρητής Α είναι ακίνητος και η πηγή S τον πλησιάζει με ταχύτητα $υ_S$ (ως προς τον αέρα). Τότε ο παρατηρητής θα αντιλαμβάνεται μεν τον ήχο να κινείται με την ΄΄σωστή΄΄ ταχύτητα υ, αλλά με μήκος κύματος $λ_A$ διαφορετικό του $λ_s$ (δηλαδή με ΄΄λάθος΄΄ μήκος κύματος, διαφορετικό από αυτό που θα μετρούσε αν η πηγή ήταν ακίνητη). Με δεδομένο ότι η πηγή σε χρόνο μιας περιόδου $T_s=1/f_S$ μετατοπίζεται κατά $υ_S.T_s$, θα έχουμε:

$λ_A=λ_s-υ_S.T_s$ (ή $λ_A=λ_s+υ_S.T_s$ αν η πηγή απομακρύνεται) (2.52)

αφού το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μέγιστα του κύματος (Σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11

Η σχέση (2.52) γίνεται:

$\boldsymbol{λ_A = λ_s \mp \frac{υ_S}{f_S}}$ και μέσω της σχέσης (2.48) $λ_A = \frac{υ}{f_S} \mp \frac{υ_S}{f_S} \Leftrightarrow λ_A = \frac{υ \mp υ_S}{f_S}$ (2.53)

Όμως $λ_A = \frac{υ}{f_A}$ (2.54), οπότε μέσω της σχέσης (2.54) η σχέση (2.53) γίνεται:

$$\mathbf{f_A = \frac{υ}{υ \mp υ_S}.f_S} \quad (2.55)$$

Δ. ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΚΑΙ ΚΙΝΟΥΜΕΝΗ ΠΗΓΗ

Αν τώρα κινείται και η πηγή και ο παρατηρητής πλησιάζοντας ο ένας τον άλλο με ταχύτητες $υ_S$ και $υ_A$ αντίστοιχα, τότε σε αντιστοιχία με τις περιπτώσεις Β (σχέση 2.49) και Γ (σχέση 2.53) θα έχουμε:

$λ_A = \frac{υ}{f_S} - \frac{υ_S}{f_S}$ και $λ_A = \frac{υ + υ_A}{f_A}$ οπότε εξισώνοντας θα έχουμε:

$$\mathbf{f_A = \frac{υ + υ_A}{υ - υ_S}.f_S} \quad (2.56)$$

ή γενικότερα

$$\mathbf{f_A = \frac{υ \pm υ_A}{υ \mp υ_S}.f_S} \quad (2.57)$$

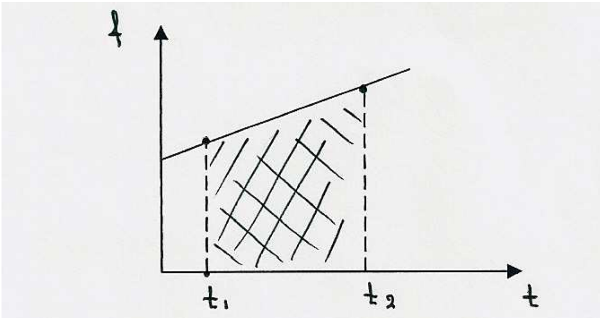
Στην σχέση (2.57) στην ταχύτητα $υ_A$ του παρατηρητή το + αντιστοιχεί στον παρατηρητή που πλησιάζει την πηγή και το – αντιστοιχεί στον παρατηρητή που απομακρύνεται. Αντίστοιχα στην ταχύτητα $υ_S$ της πηγής το + αντιστοιχεί στην πηγή που απομακρύνεται και το - στην πηγή που πλησιάζει τον παρατηρητή.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Αν μια πηγή παράγει ήχο συχνότητας f_S για χρόνο Δt_S και ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_A για χρόνο Δt_A, με δεδομένο ότι όσα κύματα παράγει η πηγή τόσα θα πρέπει να ακούει συνολικά ο παρατηρητής, θα έχουμε:

$$N_S = N_A \Leftrightarrow f_S.\Delta t_S = f_A.\Delta t_A \Leftrightarrow \mathbf{\Delta t_A = \frac{f_S}{f_A}.\Delta t_S} \qquad (2.58)$$

2. Σε διάγραμμα συχνότητας – χρόνου (f-t) το εμβαδόν μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα των χρόνων δίνει τον αριθμό των κυμάτων (Σχήμα 2.12).

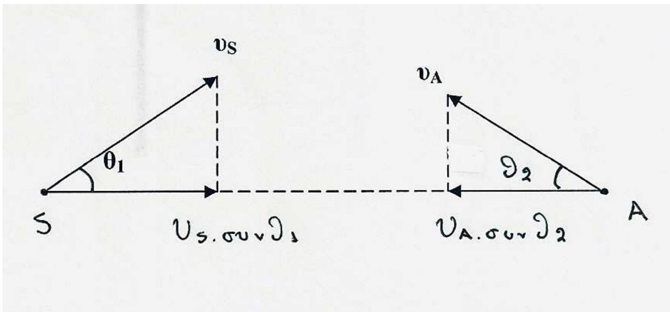


Σχήμα 2.12

Αριθμός κυμάτων = Εμβαδόν τραπεζίου

3. Αν οι διευθύνσεις των ταχυτήτων πηγής και παρατηρητή σχηματίζουν γωνία, στην σχέση (2.57) βάζουμε τις συνιστώσες των ταχυτήτων που βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ενώνει πηγή και παρατηρητή. Π.χ. από το σχήμα 2.13 θα έχουμε:

$$\mathbf{f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A.\sigma\upsilon\nu\theta_2}{\upsilon - \upsilon_S.\sigma\upsilon\nu\theta_1}.f_S} \qquad (2.59)$$



Σχήμα 2.13

4. Το φαινόμενο Doppler εμφανίζεται και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, αλλά οι μαθηματικές σχέσεις που το περιγράφουν είναι διαφορετικές από αυτές που περιγράφουν τα μηχανικά κύματα. Στηριζόμενοι στο φαινόμενο Doppler οι αστρονόμοι μπορούν και συλλέγουν πολλές πληροφορίες σχετικά με τα μακρινά ουράνια σώματα, παρατηρώντας το ηλεκτρομαγνητικό τους φάσμα.

5. Το φαινόμενο Doppler στα ηχητικά κύματα έχει πολλές εφαρμογές αφού σε αυτό στηρίζεται π.χ. η λειτουργία των ραντάρ της τροχαίας, οι υπέρηχοι καρδιάς κ.λ.π.