ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Κρούσεις ονομάζονται τα φαινόμενα κατά τα οποία μεταξύ δύο ή περισσοτέρων σωμάτων αναπτύσσονται δυνάμεις πολύ ισχυρές για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, ακόμα και αν τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή, επίσης π.χ. συμβαίνει με τα σωμάτια α όταν εκτοξεύονται εναντίον ακίνητων πυρήνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.) ακόμα και αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι μηδέν, διότι ο χρόνος κρούσης των σωμάτων είναι τόσο μικρός, ώστε οι εξωτερικές δυνάμεις δεν προλαβαίνουν να μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος, αφού από την γενίκευση του θεμελιώδη νόμου επίσης μηχανικής σε ένα σύστημα σωμάτων γνωρίζουμε:

$$\sum \vec{F}_{εξ} = \frac{\Delta \vec{p}_{ΟΛ}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_{ΟΛ} = \sum \vec{F}_{εξ} . \Delta t$$

Άρα αν $\Delta t \to 0$ τότε $\Delta p_{ΟΛ} \to 0$, δηλαδή η μεταβολή της ολικής ορμής των σωμάτων είναι περίπου μηδέν και επομένως **$p_{ΟΛ}$=σταθερό.**

2. Επειδή οι κρούσεις είναι στιγμιαία φαινόμενα, τα σώματα που συγκρούονται αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουν την ίδια θέση δηλαδή έχουν την ίδια βαρυτική δυναμική ενέργεια. Επομένως:

$$\Delta E = E_{ΤΕΛ} - E_{ΑΡΧ} = (K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ}) - (K_{ΑΡΧ} + U_{ΑΡΧ}) = K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} - U_{ΑΡΧ}$$

Όπως όμως είδαμε:

$U_{ΑΡΧ} = U_{ΤΕΛ}$ οπότε τελικά:

$$\mathbf{\Delta E = K_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} = \Delta K} \qquad (1.1)$$

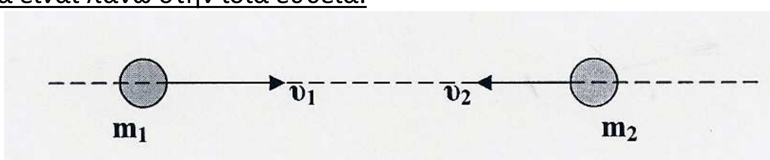
δηλαδή αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση η μεταβολή της ολικής ενέργειας ισούται με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Η μεταβολή αυτή της ενέργειας είναι συνήθως κατά απόλυτη τιμή ίση με την εκλυόμενη ενέργεια κατά την διάρκεια της κρούσης (εκλύεται ενέργεια με την μορφή θερμότητας).

1.2 ΕΙΔΗ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

Α. ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΙΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ

1. Κεντρική ή μετωπική κρούση:

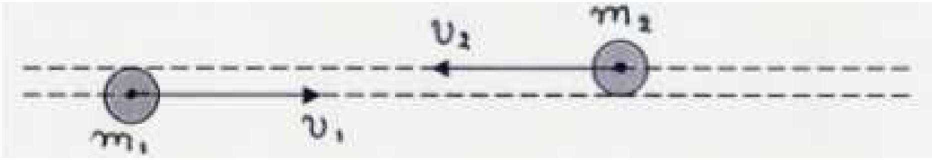
Ονομάζεται η κρούση όταν τα σώματα πριν την κρούση, έχουν τις διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας τους πάνω στην ίδια ευθεία (Σχήμα 1.1). Μάλιστα αν τα συγκρουόμενα σώματα είναι σφαίρες οι ταχύτητες των κέντρων μάζας πριν αλλά και μετά την κρούση θα είναι πάνω στην ίδια ευθεία.



Σχήμα 1.1

2. **Έκκεντρη κρούση:**

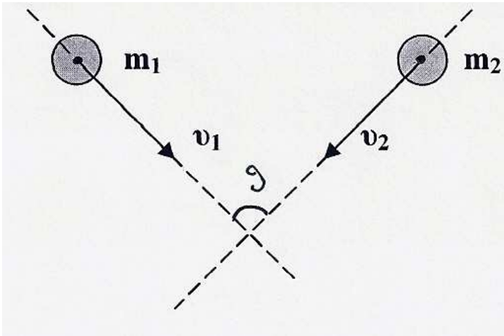
Ονομάζεται η κρούση όταν τα σώματα πριν την κρούση έχουν τις ταχύτητες των κέντρων μάζας τους, να έχουν διευθύνσεις πάνω σε παράλληλες ευθείες (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2

3. **Πλάγια κρούση:**

Ονομάζεται η κρούση όταν τα κέντρα μάζας των σωμάτων πριν την κρούση έχουν ταχύτητες με διευθύνσεις τυχαίες (δηλαδή υπό γωνία, Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3

<u>Β. ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΟΥΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ</u>

1. **Ελαστικές:**

Ονομάζονται οι κρούσεις κατά τις οποίες διατηρείται η ολική μηχανική ενέργεια (άρα και η ολική κινητική ενέργεια, αφού όπως ήδη έχουμε αναφέρει κατά την διάρκεια επίσης κρούσης η ολική βαρυτική δυναμική ενέργεια δεν μεταβάλλεται). Δηλαδή στις ελαστικές κρούσεις:

$$\mathbf{\Delta E_{ΟΛ} = \Delta K_{ΟΛ} \Leftrightarrow K_{ΟΛαρχ} = K_{ΟΛτελ}} \qquad (1.2)$$

ή

$$\mathbf{|\Delta K_1| = |\Delta K_2| \text{ ή } \Delta K_1 = -\Delta K_2} \text{ αφού } \mathbf{\Delta K_{ΟΛ} = 0} \qquad (1.2)$$

2. **Ανελαστικές:**

Ονομάζονται οι κρούσεις κατά τις οποίες η ολική μηχανική ενέργεια (άρα και η ολική κινητική ενέργεια) μειώνονται. Η απόλυτη τιμή της μεταβολής της ενέργειας ισούται (συνήθως) με την εκλυόμενη θερμότητα κατά την διάρκεια της κρούσης. Δηλαδή στις ανελαστικές κρούσεις:

$$\mathbf{Q = |\Delta E_{ΟΛ}| = |\Delta K_{ΟΛ}| \Leftrightarrow Q = |K_{ΟΛτελ} - K_{ΟΛαρχ}|} \qquad (1.3)$$

Ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης, είναι η ***πλαστική κρούση***, στην οποία τα σώματα που συγκρούονται συσσωματώνονται και κινούνται ενιαία σαν ένα.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

Το ποσοστό μείωσης της μηχανικής ενέργειας σε μία κρούση δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{α\% = \frac{\Delta K_{ΟΛ}}{K_{ΟΛαρχ}}.100} \qquad (1.4)$$

<u>ΜΕΤΩΠΙΚΗ (ΚΕΝΤΡΙΚΗ) ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΦΑΙΡΩΝ</u>

Σε μια κρούση ισχύει πάντα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.). Αν συγκρουστούν μετωπικά και ελαστικά δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 και ταχύτητες των κέντρων μάζας επίσης $υ_1$ και $υ_2$ αντίστοιχα και μετά την κρούση οι ταχύτητές των κέντρων μάζας τους είναι αντίστοιχα $υ_1'$ και $υ_2'$ (αυτές οι ταχύτητες θα είναι βέβαια συγγραμικές), τότε με εφαρμογή επίσης Α.Δ.Ο. θα έχουμε:

$$\vec{p}_{ΟΛαρχ} = \vec{p}_{ΟΛτελ} \Leftrightarrow m_1.υ_1 + m_2.υ_2 = m_1.υ_1' + m_2.υ_2' \Leftrightarrow m_1.(υ_1 - υ_1') = m_2.(υ_2' - υ_2)$$

(1.5)

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της κινητικής ενέργειας (Α.Δ.Κ.Ε.) (αφού έχουμε ελαστική κρούση) θα έχουμε:

$$K_{ΟΛαρχ} = K_{ΟΛτελ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.m_1.υ_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.υ_2^2 = \frac{1}{2}.m_1.υ_1^{2\prime} + \frac{1}{2}.m_2.υ_2^{2\prime} \Leftrightarrow$$

$$m_1.(υ_1^2 - υ_1^{2\prime}) = m_2.(υ_2^{2\prime} - υ_2^2) \Leftrightarrow m_1.(υ_1 - υ_1').(υ_1 + υ_1') = m_2.(υ_2' - υ_2).(υ_2' + υ_2)$$

(1.6)

Διαιρώντας τις σχέσεις (1.5) και (1.6) κατά μέλη θα έχουμε:

$$υ_1 + υ_1' = υ_2 + υ_2' \qquad (1.7)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.5) και (1.7) θα έχουμε:

$$\boldsymbol{υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.υ_1 + \frac{2.m_2}{m_1 + m_2}.υ_2} \qquad (1.8)$$

$$\boldsymbol{υ_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.υ_2 + \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.υ_1} \qquad (1.9)$$

Να τονίσουμε ότι σε όλη την διαδικασία έχουμε θεωρήσει ότι οι ταχύτητες κάποιας συγκεκριμένης φοράς είναι θετικές και της αντίθετης αρνητικές (π.χ. προς τα δεξιά θετικές και προς τα αριστερά αρνητικές).

<u>*Α. ΑΝ ΟΙ ΣΦΑΙΡΕΣ ΕΧΟΥΝ ΙΣΕΣ ΜΑΖΕΣ:*</u>

Αν $m_1=m_2=m$ τότε οι σχέσεις (1.8) και (1.9) δίνουν:

$υ_1'=υ_2$ και $υ_2'=υ_1$

<u>*δηλαδή τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.*</u>

<u>*Β. ΑΝ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΩΜΑ ΕΠΙΣΗΣ ΑΡΧΙΚΑ ΑΚΙΝΗΤΟ ($υ_2=0$):*</u>

Τότε οι σχέσεις (1.8) και (1.9) θα δίνουν αντίστοιχα:

$$\boldsymbol{υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.υ_1} \qquad (1.10)$$

$$\boldsymbol{υ_2' = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.υ_1} \qquad (1.11)$$

1. **Αν τα σώματα έχουν αρχικά ίσες μάζες δηλαδή $m_1=m_2=m$,**

τότε όπως ήδη έχουμε δει τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες δηλαδή:
$υ_1'=0$ και $υ_2'=υ_1$

2. Αν η κινούμενη μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη ($m_1>>m_2$),
τότε $m_1+m_2≈m_1$ και $m_1-m_2≈m_1$, οπότε οι σχέσεις (1.10) και (1.11) αντίστοιχα θα είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 \approx \frac{m_1}{m_1}.\upsilon_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon_1' = \upsilon_1} \qquad (1.12)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 \approx \frac{2.m_1}{m_1}.\upsilon_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon_2' = 2.\upsilon_1} \qquad (1.13)$$

δηλαδή η κινούμενη μάζα διατηρεί την ταχύτητά της και η ακίνητη εκτινάσσεται με διπλάσια ταχύτητα.

3. Αν η ακίνητη μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη ($m_1<<m_2$),
τότε $m_1+m_2≈m_2$ και $m_1-m_2≈ -m_2$ και $m_1/m_2≈0$, οπότε οι σχέσεις (1.10) και (1.11) αντίστοιχα θα είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 \approx \frac{-m_2}{m_1}.\upsilon_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon_1' = -\upsilon_1} \qquad (1.14)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 \approx \frac{2.m_1}{m_2}.\upsilon_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon_2' = 0} \qquad (1.15)$$

δηλαδή η κινούμενη μάζα αποκτά αντίθετη ταχύτητα ενώ η ακίνητη συνεχίζει να ακινητεί.

Σημείωση:

Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο, στην περίπτωση επίσης κεντρικής ελαστικής κρούσεις μιας σφαίρας μάζας m_1 με μια αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2:

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από την κινούμενη σφαίρα m_1 στην ακίνητη σφαίρα m_2 θα είναι:

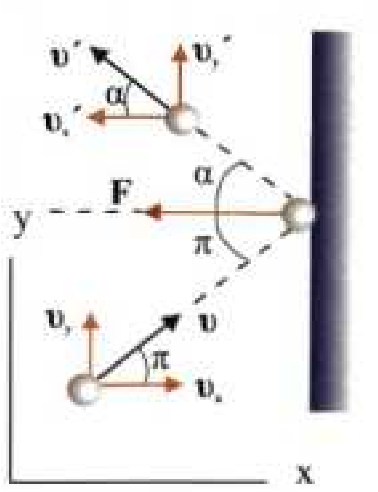
$$\alpha\% = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1O\Lambda}}.100\% = \frac{|\Delta K_2|}{K_{1O\Lambda}}.100\% \Leftrightarrow \quad \alpha\% = \frac{\left|\frac{1}{2}.m_2.\upsilon_2'^2 - 0\right|}{\frac{1}{2}.m_1.\upsilon_1^2}.100\% \quad (\text{αφού } |\boldsymbol{\Delta K_1}| = |\boldsymbol{\Delta K_2}|\ )$$

Με χρήση της σχέσης 1.11 (δηλαδή $\upsilon_2' = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.\upsilon_1$), η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boldsymbol{\alpha\% = \frac{\frac{1}{2}.m_2.\frac{4.m_1^2.\upsilon_1^2}{(m_1 + m_2)^2}}{\frac{1}{2}.m_1.\upsilon_1^2}.100\% \Leftrightarrow \qquad \alpha\% = \frac{4.m_1.m_2}{(m_1 + m_2)^2}.100\%}$$

Παρατηρούμε ότι το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο, στην περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσεις μιας σφαίρας μάζας m_1 με μια αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 είναι ανεξάρτητο επίσης ταχύτητας που έχει το αρχικά κινούμενο σώμα και εξαρτάται μόνο από την σχέση των μαζών που έχουν οι σφαίρες που συγκρούονται.

Γ. ΝΟΜΟΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ



Σχήμα 1.4

Αν ένα μπαλάκι μάζας m προσκρούσει ελαστικά σε τοίχο υπό γωνία π (Σχήμα 1.4) τότε θα ανακλαστεί υπό γωνία επίσης α=π. Πράγματι στον y-άξονα η συνιστώσα επίσης ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, αφού το σώμα δεν δέχεται δύναμη στην κατεύθυνση αυτού του άξονα κατά την στιγμή της κρούσης (η μεταβολή της ορμής στον y-άξονα που του προκαλεί το βάρος του θεωρείται κατά τη κρούση αμελητέα, γιατί ο χρόνος κρούσης είναι πολύ μικρός), επομένως:

$$\upsilon_y=\upsilon_y' \qquad (1.16)$$

ενώ στον x-άξονα έχουμε ουσιαστικά ελαστική κρούση επίσης σώματος με άλλο πολύ μεγαλύτερης μάζας (τοίχος), οπότε με βάση αυτά που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο θα έχουμε:

$$-\upsilon_x=\upsilon_x' \qquad (1.17)$$

Αφού δε η κρούση είναι ελαστική θα έχουμε από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας:

$$K_{ΑΡΧ} = K_{ΤΕΛ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 = \frac{1}{2}.m.\upsilon'^2 \Leftrightarrow \upsilon = \upsilon'$$

ενώ επίσης:

$$εφπ = \left|\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right| \text{ και } εφα = \left|\frac{\upsilon_y'}{\upsilon_x'}\right|$$, επομένως **π=α** (1.18) **(νόμος ανάκλασης)**

1.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Περιοδικές ονομάζονται οι κινήσεις εκείνες, οι οποίες επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα τα οποία ονομάζονται ***περίοδοι.*** Η περίοδος συμβολίζεται με το ***Τ*** .

Ταλαντώσεις ονομάζονται οι παλινδρομικές κινήσεις γύρω από μια θέση ισορροπίας και φυσικά είναι περιοδικές κινήσεις. Όσες ταλαντώσεις γίνονται πάνω σε ευθεία τροχιά ονομάζονται ***γραμμικές ταλαντώσεις***, ενώ ειδικά όταν η απομάκρυνσή τους από την θέση ισορροπίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου ονομάζονται ***γραμμικές ή απλές αρμονικές ταλαντώσεις*** (***Γ.Α.Τ. ή Α.Α.Τ.*** πιο σύντομα).

Συχνότητα (f) μιας περιοδικής κίνησης ονομάζεται ο αριθμός των κινήσεων που ολοκληρώνονται στην μονάδα του χρόνου. Δηλαδή ισχύει:

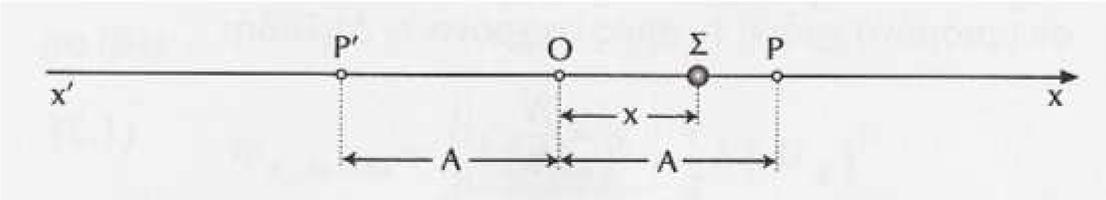
$$\mathbf{f}=\frac{\textbf{Αριθμός κινήσεων}}{\textbf{Χρόνος}}=\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\Delta t}}\Rightarrow \mathbf{f}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \quad (1.19)$$

Η περίοδος **(Τ)** στο (S.I.) μετριέται σε sec και η συχνότητα **(f)** σε sec^{-1} ή Hz.

1.4 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ)

Έστω ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (Α.Α.Τ.) πάνω σε μια ευθεία γύρω από μια θέση ισορροπίας (x=0) μεταξύ των θέσεων +Α και –Α, όπως φαίνεται ακολούθως:



Σχήμα 1.5

Αν η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση, τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο αποδεικνύεται ότι θα είναι:

$$\mathbf{x=A.\eta\mu(\omega.t+\phi_o)} \quad (1.20)$$

όπου:
x η στιγμιαία απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας,
Α το πλάτος (μέγιστη τιμή) της απομάκρυνσης,
$\boldsymbol{\omega=\frac{2.\pi}{T}=2.\pi.f}$, η κυκλική (γωνιακή) συχνότητα της ταλάντωσης, μετρημένη σε rad/s στο S.I.,
t η χρονική στιγμή,
ϕ_o η αρχική φάση της ταλάντωσης, όπου $0\le\phi_o<2\pi$,
$\phi=\omega t+\phi_o$, η φάση της ταλάντωσης (με διαστάσεις γωνίας).
Επίσης η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος αποδεικνύεται ότι θα είναι:

$$\boldsymbol{\upsilon=\upsilon_{max}.\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_o)} \quad (1.21)$$

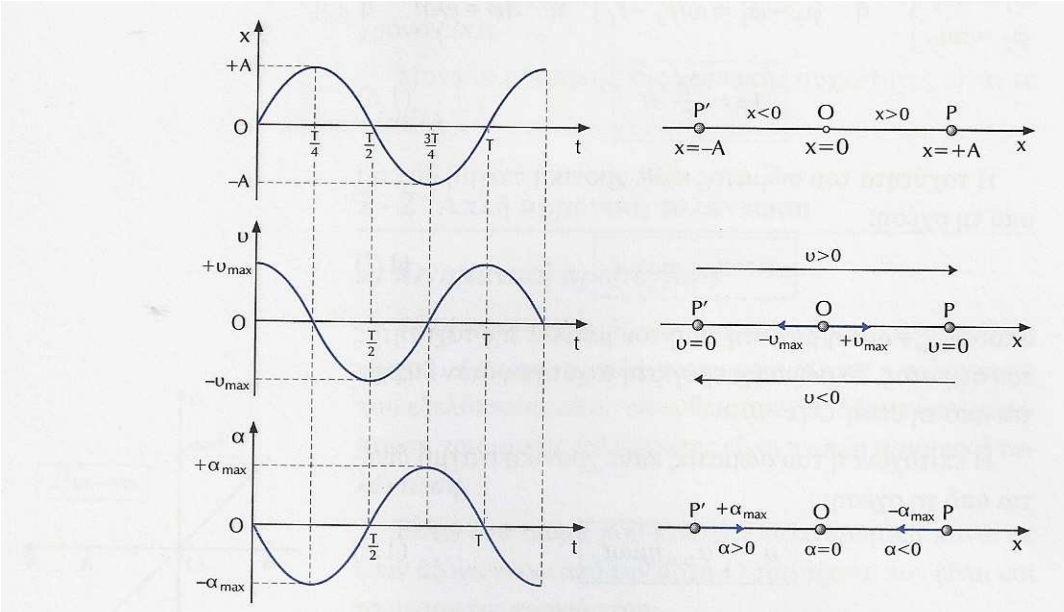
όπου:
υ η στιγμιαία τιμή της ταχύτητας του σώματος και
$\boldsymbol{\upsilon_{max}=\omega.A}$ το πλάτος (μέγιστη τιμή) της ταχύτητας,

ενώ η εξίσωση της επιτάχυνσης αποδεικνύεται ότι θα είναι:

$$\boldsymbol{\alpha=-\alpha_{max}.\eta\mu(\omega t+\phi_o)} \quad (1.22)$$

όπου:
α η στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης του σώματος και
$\boldsymbol{\alpha_{max}=\omega^2.A}$ το πλάτος (μέγιστη τιμή) της επιτάχυνσης.

Για ένα σώμα που εκτελεί (Α.Α.Τ.) και που την χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην θέση ισορροπίας κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, η αρχική φάση είναι μηδέν και τα διαγράμματα απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης με τον χρόνο, θα είναι τα ακόλουθα.



Σχήμα 1.6

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Οι εξισώσεις κίνησης (1.20), (1.21) και (1.22) που ήδη έχουμε αναφέρει, με χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

ημ(π/2+θ)=συνθ και ημ(π+θ)=-ημθ

παίρνουν την μορφή:

$$x=A.\eta\mu(\omega.t+\phi_o)$$
$$\upsilon=\omega.A.\eta\mu(\omega.t+\phi_o+\pi/2)$$
$$\alpha=\omega^2.A.\eta\mu(\omega.t+\phi_o+\pi)$$

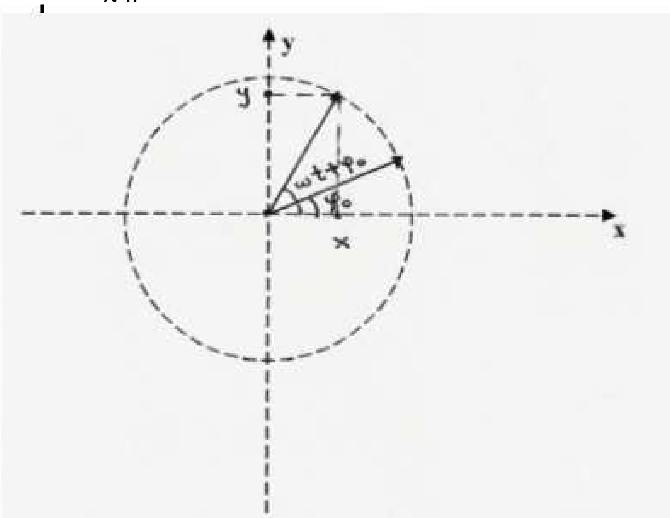
Επομένως βλέπουμε ότι:

- Η φάση της ταχύτητας προηγείται της φάσης της απομάκρυνσης κατά π/2 (άρα χρονικά προηγείται η ταχύτητα της απομάκρυνσης κατά T/4)
- Η φάση της επιτάχυνσης προηγείται της φάσης της ταχύτητας κατά π/2 και της φάσης της απομάκρυνσης κατά π (άρα χρονικά προηγείται η επιτάχυνση της ταχύτητας κατά T/4 και της απομάκρυνσης κατά T/2)

2. Η αρχική φάση ϕ_o της Α.Α.Τ., είναι η φάση της την χρονική στιγμή t=0, παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 2.π και για να την προσδιορίσουμε πρέπει να ξέρουμε την θέση του σώματος εκείνη την χρονική στιγμή (t=0) καθώς και την κατεύθυνση της ταχύτητάς του. Έτσι λοιπόν έχουμε:

- *$\varphi_o=0$ αν για t=0 έχω x=0 και υ>0.*
- *$\varphi_o=\pi$ αν για t=0 έχω x=0 και υ<0.*
- *$\varphi_o=\pi/2$ αν για t=0 έχω x=+A.*
- *$\varphi_o=3\pi/2$ αν για t=0 έχω x=-A.*

3. Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα μέτρου Α, το οποίο έχει αρχή την αρχή Ο ενός συστήματος αξόνων xy και το οποίο στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Τότε όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.7

i. Αρχική φάση ϕ_o είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον θετικό x-ημιάξονα τη στιγμή $t_o=0$.

ii. Μετά από χρόνο t θα έχει στραφεί το διάνυσμα κατά γωνία Δφ=ω.t οπότε θα σχηματίζει γωνία $\phi=\omega.t+\phi_o$ με τον θετικό x-ημιάξονα. Επομένως οι προβολές του άκρου του στρεφόμενου διανύσματος στους x και y άξονες θα έχουν αλγεβρικές τιμές:

$y=A.\eta\mu(\omega.t+\phi_o)$

και $x=A.\sigma\upsilon\nu(\omega.t+\phi_o)=A.\eta\mu(\omega.t+\phi_o+\pi/2)$

Επομένως καθεμία από τις προβολές εκτελεί Α.Α.Τ.

iii. Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι η ομαλή κυκλική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα δύο Α.Α.Τ. με το ίδιο πλάτος, σε κάθετες διευθύνσεις με διαφορά φάσης π/2. ***Γενικότερα κάθε περιοδική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σύνθεση ενός αριθμού Α.Α.Τ. και γι' αυτό η μελέτη των Α.Α.Τ. είναι τόσο σημαντική.***

4. Αφού $\omega=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (1.23) , το ω μπορεί να θεωρηθεί ως **ο ρυθμός μεταβολής της φάσης.**

Β. Η ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Αφού σε μια (Α.Α.Τ.) η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι $\alpha=-\omega^2A.\eta\mu(\omega t+\phi_o)$ και της απομάκρυνσης $x=A.\eta\mu(\omega t+\phi_o)$, θα ισχύει προφανώς:

$$\boldsymbol{\alpha=-\omega^2.x} \qquad (1.24)$$

Επίσης από τον δεύτερο νόμο του Newton (θεμελιώδη νόμο της μηχανικής), γνωρίζουμε ότι θα ισχύει:

$$\boldsymbol{\Sigma F=m.\alpha} \qquad (1.25)$$

Από τις (1.24) και (1.25) έχουμε:

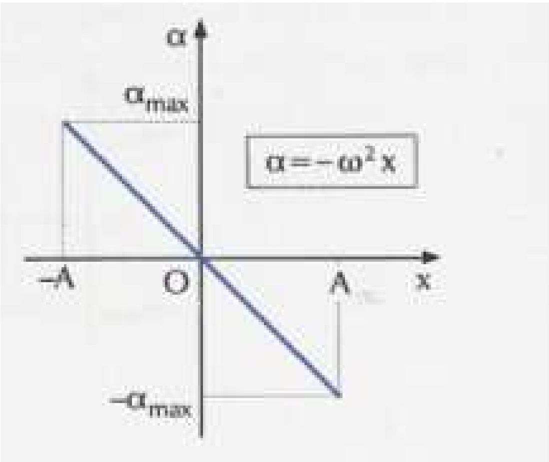
$$\Sigma F=-m.\omega^2.x=-D.x\,(\alpha\nu\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\omega\ \ D=m.\omega^2) \qquad (1.26)$$

Η σχέση **ΣF=-D.x** (1.26) αποτελεί *ικανή και αναγκαία συνθήκη* για απλή αρμονική ταλάντωση και μας πληροφορεί ότι στην (Α.Α.Τ.) η δύναμη ***επαναφοράς (ΣF)*** είναι ανάλογη και αντίθετη της απομάκρυνσης. Η σταθερά D ονομάζεται ***σταθερά επαναφοράς*** και στο S.I. μετριέται σε N/m.

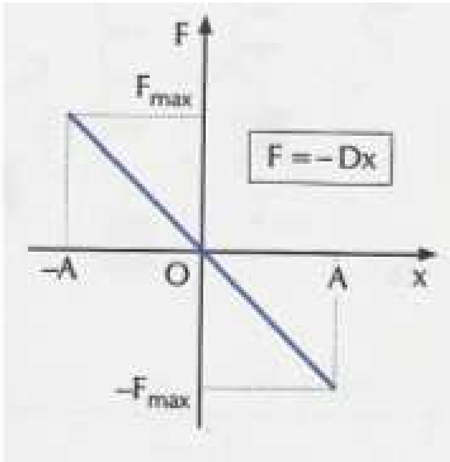
Αν η σχέση (1.26) λυθεί ως προς ω, θα έχω $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$, που με αντικατάσταση στην σχέση $\omega = \frac{2\pi}{T}$, δίνει για την *περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης:*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (1.27)$$

Οι γραφικές παραστάσεις που δίνουν την μεταβολή της επιτάχυνσης με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας, καθώς και την μεταβολή της δύναμης επαναφοράς με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας, θα είναι αντίστοιχα:



Σχήμα 1.8.α



Σχήμα 1.8.β

Η κλίση της πρώτης γραφικής παράστασης (Σχήμα 1.8.α) είναι ίση με $-\omega^2$ και της δεύτερης (Σχήμα 1.8.β) με –D.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Θέση ισορροπίας σε μια Α.Α.Τ. είναι η θέση στην οποία η συνισταμένη των δυνάμεων (δηλαδή η δύναμη επαναφοράς) είναι ίση με μηδέν.

2. $F=-D.x \Leftrightarrow F=-m.\omega^2.A.\eta\mu(\omega.t+\varphi_o) \Leftrightarrow \mathbf{F=-F_{max}.\eta\mu(\omega.t+\varphi_o)}$ (1.28)
όπου $F_{max}=-m.\omega^2.A$, η μέγιστη τιμή (πλάτος) της δύναμης επαναφοράς.

Προφανώς η γραφική παράσταση που δείχνει την μεταβολή της δύναμης επαναφοράς με το χρόνο, είναι ίδια με αυτή που δείχνει τη μεταβολή της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο. Έτσι και η φάση της δύναμης επαναφοράς προηγείται κατά π/2 από αυτήν της ταχύτητας και κατά π από τη φάση της απομάκρυνσης.

3. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την Α.Α.Τ και της οποίας η λύση δίνει τις εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\sum \mathbf{F = -D.x = m.\alpha \Leftrightarrow D.x + m.\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow D.x + m.\frac{d^2x}{dt^2} = 0} \qquad (1.29)$$

Γ. Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ένα σώμα το οποίο ταλαντώνεται απλά αρμονικά έχει δυναμική και κινητική ενέργεια.

1. Κινητική ενέργεια:

$\mathbf{K = \frac{1}{2}.m.\upsilon^{2}}$ (1.30α), της οποίας η μέγιστη τιμή είναι $\mathbf{K_{max}\ \frac{1}{2}.m.\upsilon_{max}^{2}}$ (1.30β).

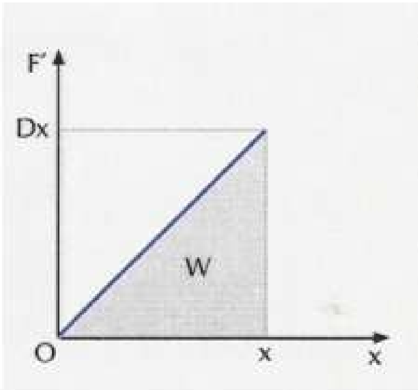
2. Δυναμική ενέργεια:

Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. ισούται με το έργο μιας εξωτερικής δύναμης η οποία θα είναι αντίθετη της δύναμης επαναφοράς (επομένως F΄=D.x). Το έργο αυτό υπολογίζετε σε διάγραμμα δύναμης-απομάκρυνσης από το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των απομακρύνσεων, όπως φαίνεται ακολούθως (βλέπε και Σχήμα 1.9):

Δυναμική ενέργεια = Εμβαδόν τριγώνου = β.υ/2 = x.D.x/2 = D.x^2/2$\Rightarrow$ $\mathbf{U = \frac{1}{2}.D.x^{2}}$.

Επομένως:

$\mathbf{U = \frac{1}{2}.D.x^{2}}$ (1.31α), της οποίας η μέγιστη τιμή είναι $\mathbf{U_{max} = \frac{1}{2}.D.A^{2}}$ (1.31β).



Σχήμα 1.9

Σημείωση:

Ας θυμηθούμε ότι γενικά για την περίπτωση συντηρητικών δυνάμεων, το έργο τους σε μία διαδρομή είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής της δύναμης και ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή:

$$\mathbf{W_{A\rightarrow B} = -\Delta U_{AB} = U_{A} - U_{B}}$$

Επομένως θεωρώντας ότι στην θέση ισορροπίας όπου η δύναμη επαναφοράς είναι ίση με μηδέν, είναι και η δυναμική ενέργεια ίση με μηδέν θα έχουμε:

$$\mathbf{W = U_{ΑΡΧ} - U_{ΤΕΛ} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}D.x^{2} = -U_{ΤΕΛ} \Leftrightarrow U = \frac{1}{2}.D.x^{2}}$$

3. Ολική (μηχανική) ενέργεια

<u>Ενέργεια ταλάντωσης</u> ονομάζεται η ενέργεια που προσφέρεται αρχικά από κάποιο εξωτερικό αίτιο σε ένα ταλαντούμενο σύστημα ώστε αυτό να αρχίσει να ταλαντώνεται.

Η ολική ενέργεια ταλάντωσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή, είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας. Δηλαδή:

$$\mathbf{E = K + U = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 + \frac{1}{2}.D.x^2} \quad (1.32α)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

Γενικά σε μια (Α.Α.Τ.) μπορούμε να δείξουμε τα ακόλουθα:

1. Αν K_{max}=U_{max} και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ τότε υ_{max}=ω.Α.

Απόδειξη:

K_{max}=U_{max} $\Leftrightarrow \frac{1}{2}m.\upsilon^2_{max} = \frac{1}{2}.D.A^2 \Leftrightarrow m.\upsilon^2_{max} = m.\omega^2.A^2 \Leftrightarrow \upsilon_{max} = \omega.A$,

χρησιμοποιώντας βέβαια την σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Leftrightarrow D = m.\omega^2$$

2. Αν υ_{max}=ω.Α και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ τότε E=K_{max}=U_{max}.

Απόδειξη:

Αφού $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Leftrightarrow D = m.\omega^2$ τότε:

$$E = K + U = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 + \frac{1}{2}.D.x^2 = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2_{max}.συν^2(\omega.t+\varphi_o) + \frac{1}{2}.D.A^2.ημ^2(\omega.t+\varphi_o) \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}.m.\omega^2.A^2.συν^2(\omega.t+\varphi_o) + \frac{1}{2}.m.\omega^2.A^2.ημ^2(\omega.t+\varphi_o) = \frac{1}{2}.m.\omega^2.A^2.$$

$$(συν^2(\omega.t+\varphi_o) + ημ^2(\omega.t+\varphi_o)) \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}.m.\omega^2.A^2 = \frac{1}{2}.m.\upsilon_o^2 = K_{max} \text{ ή } E = \frac{1}{2}.D.A^2 = U_{max}$$

Δηλαδή δείξαμε ότι:

$$\mathbf{E = K + U = K_{max} = U_{max}} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 + \frac{1}{2}.D.x^2 = \frac{1}{2}.m.\upsilon^2_{max} = \frac{1}{2}.D.A^2} \quad (1.32β)$$

3. Να δείξετε ότι σε μία Α.Α.Τ. η σχέση που συνδέει την ταχύτητα του σώματος με τη θέση του είναι: $\mathbf{\upsilon = \pm\omega.\sqrt{A^2 - x^2}}$ (1.33)

Απόδειξη:

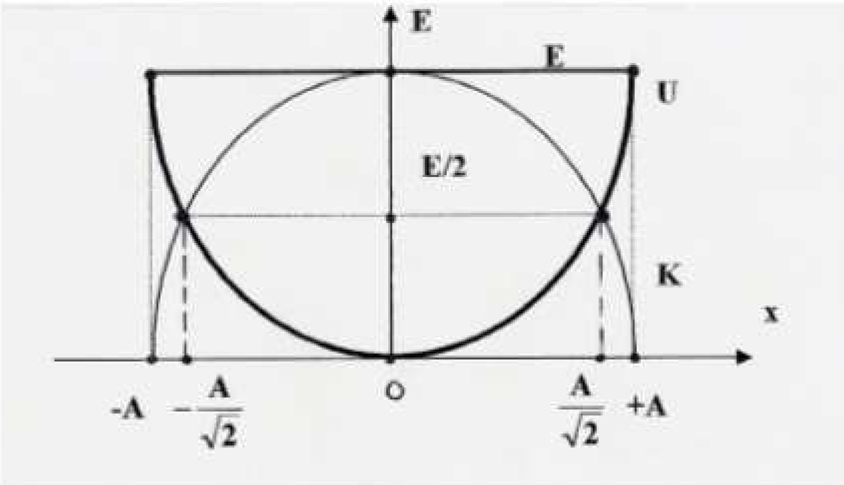
$$E = K + U \Leftrightarrow U_{max} = K + U \Leftrightarrow \frac{1}{2}.D.A^2 = \frac{1}{2}.D.x^2 + \frac{1}{2}.m.\upsilon^2 \Leftrightarrow \text{(αφού D=m.ω}^2\text{)}$$

$$m.\omega^2.A^2 = m.\omega^2.x^2 + m.\upsilon^2 \Leftrightarrow \mathbf{\upsilon = \pm\omega.\sqrt{A^2 - x^2}}$$

<u>Γραφικά θα έχουμε:</u>

<u>i. Διάγραμμα ενεργειών σε συνάρτηση με την θέση:</u>

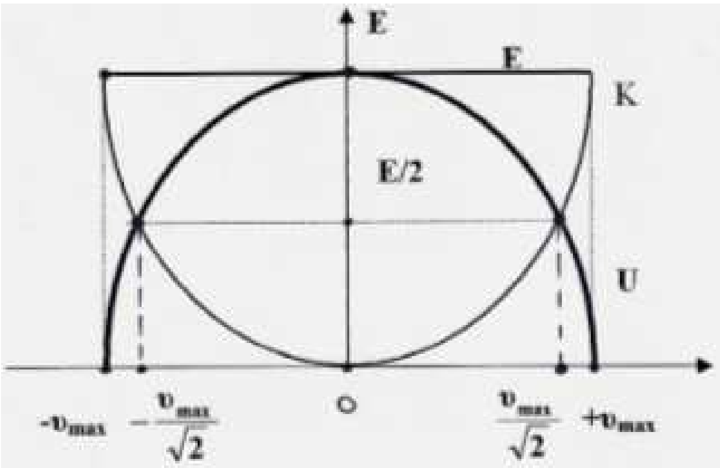
Η δυναμική ενέργεια δίνεται από την σχέση **U=(1/2).D.x²** (της μορφής y=a.x²) και άρα έχει γραφική παράσταση παραβολή με τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ η κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση **K=E-U⇒K=E-(1/2).D.x²** (της μορφής $y=a.x^2+b$) και θα έχει γραφική παράσταση παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω αφού $a<0$. Η μηχανική δε ενέργεια παραμένει σταθερή, δηλαδή **E=σταθερή**.



Σχήμα 1.10

ii. Διάγραμμα ενεργειών σε συνάρτηση με την ταχύτητα:

Η κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση **K=(1/2).m.υ²** (της μορφής $y=a.x^2$) και άρα έχει γραφική παράσταση παραβολή με τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ η δυναμική ενέργεια δίνεται από την σχέση **U=E-K⇒U=E-(1/2).m.υ²** (της μορφής $y=a.x^2+b$) και θα έχει γραφική παράσταση παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω. Η μηχανική δε ενέργεια παραμένει σταθερή.



Σχήμα 1.11

iii. Διάγραμμα ενεργειών σε συνάρτηση με τον χρόνο:

$U=(1/2).D.x^2=(1/2).D.A^2.\eta\mu^2(\omega t+\varphi_o)=E.\eta\mu^2(\omega t+\varphi_o)$

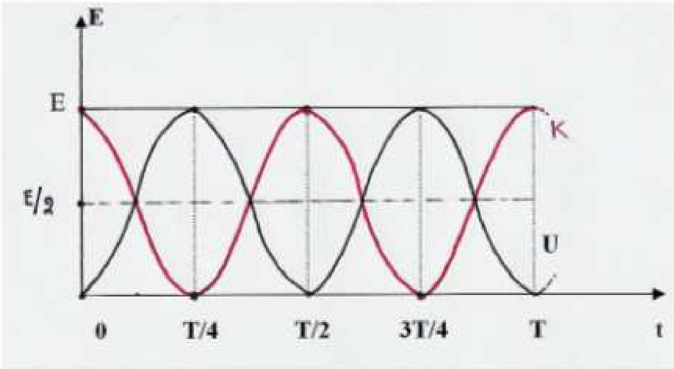
$$\text{ή}\ \mathbf{U}=\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\mathbf{2.\omega.t}+\mathbf{2.\varphi_o}) \qquad (1.34\alpha)$$

$K=(1/2).m.\upsilon^2=(1/2).m.\upsilon_o^2.\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_o)=E.\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_o)$

$$\text{ή}\ \mathbf{K}=\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\mathbf{2.\omega.t}+\mathbf{2.\varphi_o}) \qquad (1.34\beta)$$

αφού $\eta\mu^2 x = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ αντίστοιχα.

Επομένως θα έχουμε (για την περίπτωση που $\varphi_o=0$):



Σχήμα 1.12

Αν $\varphi_o \neq 0$ μεταβάλλονται τα διαγράμματα κατάλληλα.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Παρατηρούμε ότι η περίοδος της μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας με τον χρόνο είναι η μισή της περιόδου της Α.Α.Τ.

2. Σε κάθε περίοδο η κινητική και η δυναμική ενέργεια μεγιστοποιούνται δύο φορές και εξισώνονται τέσσερις (τις χρονικές στιγμές Τ/8, 3Τ/8, 5Τ/8 και 7Τ/8 αν $\varphi_o=0$).

Πράγματι:

$$E=K+U \xrightarrow{K=U} U_{max} = 2.U \Rightarrow \frac{1}{2}.D.A^2 = 2.\frac{1}{2}.D.x^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

Αν η αρχική φάση είναι μηδέν τότε:

$$x = A.\eta\mu\omega t \Rightarrow \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = A.\eta\mu(\frac{2.\pi}{T}.t) \Rightarrow \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu(\frac{2.\pi}{T}.t) \Rightarrow$$

$$\frac{2.\pi}{T}.t = \frac{\pi}{4} + k.\pi \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{8}} + \mathbf{k}.\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}} \text{ ή } \frac{2.\pi}{T}.t = \frac{3.\pi}{4} + k.\pi \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{\mathbf{3.T}}{\mathbf{8}} + \mathbf{k}.\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}} \text{ με } k=0, 1, 2,...$$

3. ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΕ ΜΙΑ Α.Α.Τ.:

i) Ρυθμός μεταβολής της θέσης (είναι η ταχύτητα, η παράγωγος της θέσης ως προς χρόνο):

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon = \omega.A.\sigma\upsilon\nu(\omega.t + \varphi_o)$$

ii) Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (είναι η επιτάχυνση, η παράγωγος της ταχύτητας ως προς χρόνο):

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha = -\omega^2.A.\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$$

iii) Ρυθμός μεταβολής της ορμής (είναι η δύναμη επαναφοράς, η παράγωγος της ορμής ως προς χρόνο):

$$\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{-m.\omega^2.A.\eta\mu(\omega t+\varphi_o)}$$

iv) Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας (είναι η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς χρόνο):

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε θα έχουμε:

$$\Delta K = \Delta W_{O\Lambda} \Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Sigma F.\Delta x}{\Delta t} = \Sigma F.\upsilon \Leftrightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F.\upsilon = -D.x..\upsilon \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -m.\omega^2.A.\eta\mu(\omega.t+\varphi_o).\omega A.\sigma\upsilon\nu(\omega.t+\varphi_o) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{m.\omega^3.A^2}{2}\eta\mu[2.(\omega.t+\varphi_o)] \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{dK}{dt}\right| = \frac{m.\omega^3.A^2}{2} \qquad (1.35)$$

Η σχέση (1.35) δίνει τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κατά απόλυτη τιμή.

v) Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας (είναι η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς χρόνο):

Σε μια Α.Α.Τ. η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή δηλαδή:

$$E = K + U = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \Leftrightarrow dE = dK + dU = 0 \Leftrightarrow dK = -dU \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = D.x.\upsilon = \frac{\mathbf{m.\omega^3.A^2}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\eta\mu[2.(\omega.t+\varphi_o)]} \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{dU}{dt}\right| = \frac{m.\omega^3.A^2}{2} \qquad (1.36)$$

Η σχέση (1.36) δίνει τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας κατά απόλυτη τιμή.

Γενικότερα ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι σε κάθε περίπτωση (και όχι μόνο στην α.α.τ.) αντίθετος της ισχύος της συντηρητικής δύναμης:

$$\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-F_{\Sigma YNT}.\upsilon} \qquad (1.37)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στη σημείωση 2 της σελίδας 8 μπορούμε να δείξουμε ότι οι ρυθμοί μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας μεγιστοποιούνται όταν οι ενέργειες εξισώνονται δηλαδή τις χρονικές στιγμές:

$$t = \frac{T}{8} + k.\frac{T}{2} \text{ ή } t = \frac{3.T}{8} + k.\frac{T}{2} \text{ με k=0, 1, 2,… (αν } \varphi_o\text{=0)}$$

Πράγματι:

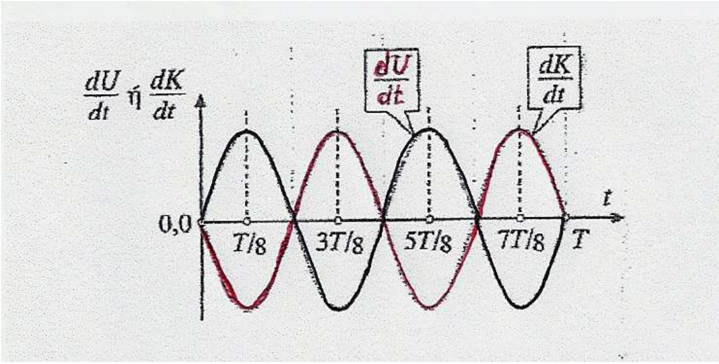
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt} = -\frac{m.\omega^3.A^2}{2}.\eta\mu(2.\omega.t)$ (για φ_o=0) μεγιστοποιείται κατά απόλυτη τιμή όταν:

$$\left|\eta\mu(2\omega t)\right| = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(2.\frac{2.\pi}{T}.t) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{4.\pi}{T}.t = (2.k+1).\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{t = (2.k+1).\frac{T}{8}}$$, με k=0, 1, 2,……

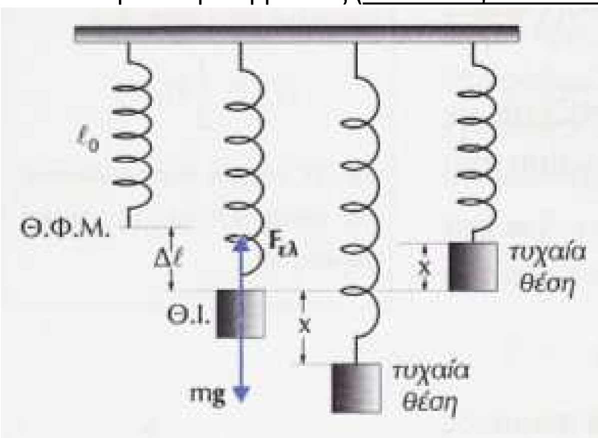
Τα ίδια ισχύουν και για τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.

Γραφικά θα έχουμε:



Σχήμα 1.13

4. Σε κάθε Α.Α.Τ. που το ταλαντούμενο σύστημα έχει ελατήριο, οι παραμορφώσεις του ελατηρίου μετριούνται από την θέση φυσικού μήκους του, ενώ οι απομακρύνσεις της ταλάντωσης μετριούνται από την θέση ισορροπίας (<u>δεν ταυτίζονται πάντα).</u>



Σχήμα 1.14

Έτσι στο παραπάνω σχήμα 1.14, στις τυχαίες θέσης της ταλάντωσης (), έχουμε:

Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης: $\mathbf{U = \frac{1}{2}.D.x^2}$

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου: $\mathbf{U = \frac{1}{2}.k.(\Delta\ell \pm x)^2}$

Μέτρο δύναμης επαναφοράς: $\mathbf{F_{ΕΠ} = D.x}$

Μέτρο δύναμης ελατηρίου: $\mathbf{F_{ΕΛ} = k.(\Delta\ell \pm x)}$

5. Έργο συντηρητικής δύναμης (ΑΣ ΤΟ ΞΑΝΑΘΥΜΗΘΟΥΜΕ, S.O.S.!!!):

Είναι χρήσιμο για την αντιμετώπιση προβλημάτων μηχανικής (και όχι μόνο ταλαντώσεων) να θυμηθούμε ότι γενικά το έργο κάθε συντηρητικής δύναμης δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{W_F = -\Delta U = U_{APX} - U_{TE\Lambda}} \qquad (1.38)$$

Επομένως το έργο της δύναμης του ελατηρίου όταν αυτό βρεθεί π.χ. από κατάσταση παραμόρφωσης x_1 σε κατάσταση παραμόρφωσης x_2 θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}.k.x_1^2 - \frac{1}{2}.k.x_2^2}$$

1.5 ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Α. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ

Στις ταλαντώσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα, υποθέσαμε ότι οι απώλειες ενέργειας ήταν αμελητέες με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει αμετάβλητο, σε όλη την διάρκεια της ταλάντωσης. Οι πραγματικές όμως ταλαντώσεις πραγματοποιούνται υπό την επίδραση δυνάμεων απόσβεσης (τριβές κ.λ.π.) οι οποίες με την πάροδο του χρόνου ελαττώνουν την ενέργεια του ταλαντούμενου συστήματος και άρα το πλάτος του έως ότου η ταλάντωση σταματήσει. Τέτοιες ταλαντώσεις ονομάζονται φθίνουσες.

Από όλες τις περιπτώσεις φθινουσών ταλαντώσεων, ειδικά μας απασχολούν οι ταλαντώσεις εκείνες στις οποίες η δύναμη απόσβεσης είναι αντίθετη και ανάλογη της ταχύτητας δηλαδή

$$\mathbf{F' = -b.\upsilon} \qquad (1.39)$$

όπου b η σταθερά απόσβεσης η οποία εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθος του ταλαντούμενου σώματος, καθώς και το μέσο στο οποίο γίνεται η ταλάντωση.
Έτσι θα έχουμε για την κίνηση την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Leftrightarrow -b.\upsilon - D.x = m.a \Leftrightarrow \mathbf{m.\frac{d\upsilon}{dt} + b.\upsilon + D.x = 0} \Leftrightarrow \mathbf{m.\frac{d^2x}{dt^2} + b.\frac{dx}{dt} + D.x = 0}$$
$$(1.40)$$

Αποδεικνύεται ότι σε μια τέτοια ταλάντωση, το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση:

$$\mathbf{A_n = A_o.e^{-\Lambda.t}} \qquad (1.41)$$

όπου A_o είναι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης (θεωρούμε ότι το σώμα την χρονική στιγμή t=0 ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση $x=+A_o$),

A_n είναι το πλάτος της ταλάντωσης μετά από n πλήρεις ταλαντώσεις,

Λ είναι ο συντελεστής απόσβεσης που εξαρτάται από την τιμή του b (Λ=b/2m) και στο S.I. μετριέται σε sec^{-1}

και t=n.T είναι η χρονική στιγμή που μετράμε το πλάτος μετά από n πλήρεις ταλαντώσεις, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

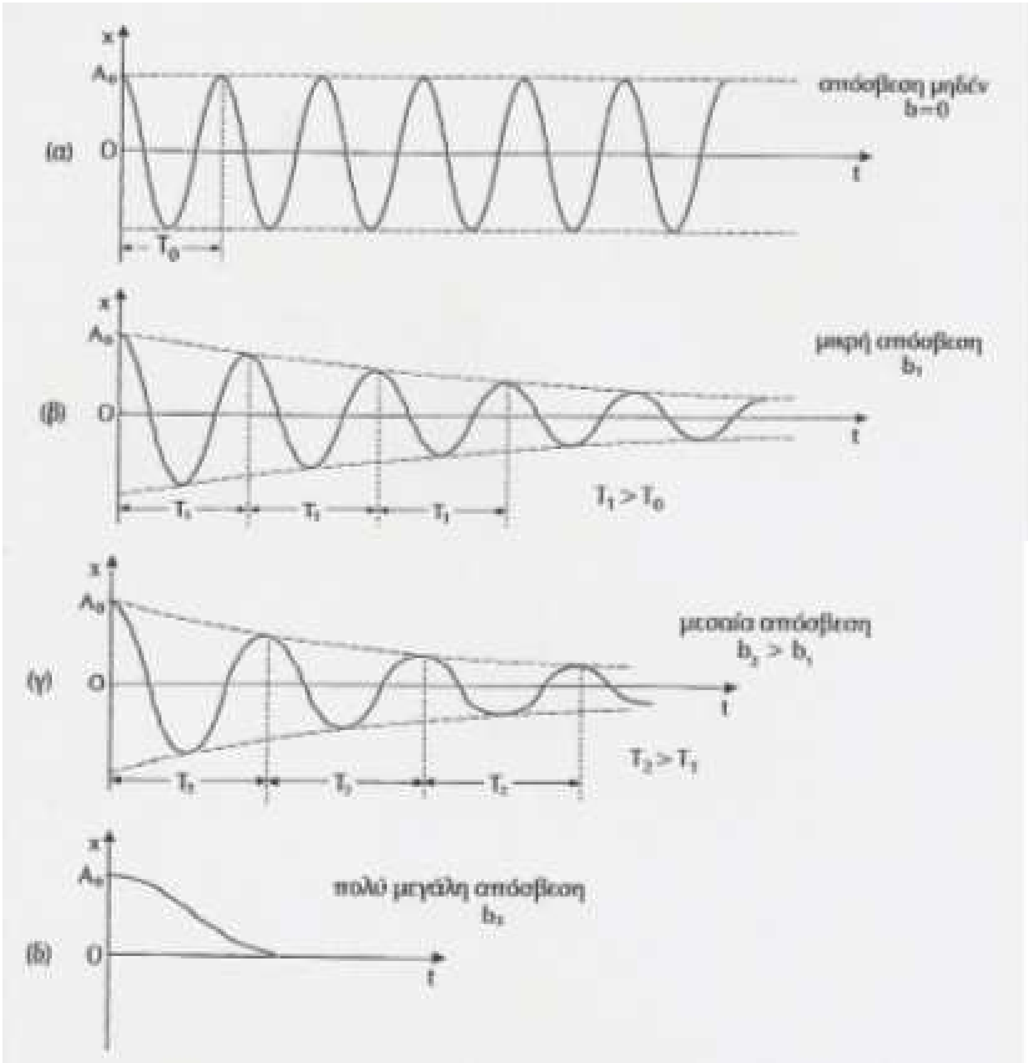
Γενικά σε μια φθίνουσα ταλάντωση ισχύει:

α. Σε κάθε φθίνουσα ταλάντωση η περίοδός της παραμένει σταθερή εφ' όσον δεν μεταβάλλεται η σταθερά απόσβεσης.

β. Από ταλάντωση σε ταλάντωση όταν οι αποσβέσεις αυξάνουν, η περίοδος της ταλάντωσης αυξάνεται και ο ρυθμός μείωσης του πλάτους αυξάνεται επίσης.

γ. Για πολύ μεγάλες αποσβέσεις η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.

Η στιγμιαία βέβαια μετατόπιση εξακολουθεί να είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου, μόνο που το πλάτος μειώνεται. Γραφικά τα παραπάνω μπορούν να παρασταθούν με το ακόλουθο διάγραμμα:



Σχήμα 1.15

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πηλίκο των πλατών σε δύο διαδοχικές περιόδους παραμένει σταθερό δηλαδή ότι $\frac{A_n}{A_{n+1}} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$. Πράγματι:

$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = ... = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_o.e^{-\Lambda n \mathrm{T}}}{A_o.e^{-\Lambda(n+1)T}} = \frac{e^{-\Lambda nT}}{e^{-\Lambda nT}.e^{-\Lambda \mathrm{T}}} = e^{\Lambda.T} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \quad (1.42)$$

Όσον αφορά την ολική ενέργεια μιας φθίνουσας ταλάντωσης θα έχουμε:

$$E_n = \frac{1}{2}.D.A_n^2 = \frac{1}{2}.D.A_o^2.e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E_n = E_o.e^{-2\Lambda t}, \qquad (1.43)$$

οπότε και πάλι μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πηλίκο των ενεργειών σε δύο διαδοχικές περιόδους είναι σταθερό.

Πράγματι:

$$\frac{E_o}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = ... = \frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{E_o.e^{-2\Lambda nT}}{E_o.e^{-2\Lambda(n+1)T}} = \frac{e^{-2\Lambda nT}}{e^{-2\Lambda nT}.e^{-2\Lambda \mathrm{T}}} = e^{2\Lambda \mathrm{T}} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \, (1.44)$$

θεωρώντας t=n.T. Δηλαδή και η ολική ενέργεια σε μια τέτοια ταλάντωση μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο (για μετρήσεις στις χρονικές στιγμές t=n.T). Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι οι στιγμιαίες τιμές της ενέργειας μεταβάλλονται όπως και οι στιγμιαίες τιμές της απομάκρυνσης αρμονικά με τον χρόνο.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Όταν υπάρχουν αποσβέσεις η πραγματική συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης είναι:

$$\mathbf{f = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}} \qquad (1.45)$$

Για το σχολικό βιβλίο όμως πάντα θεωρούμε τον όρο $(b/2m)^2$ αμελητέο σε σχέση με τον D/m στις ασκήσεις.

2. **Χρόνος υποδιπλασιασμού (ή ημιζωής $t_{1/2}$)** είναι ο χρόνος μέσα στον οποίο το πλάτος θα έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Δηλαδή θα έχουμε:

$$A_n = A_o.e^{-\Lambda.t} \Leftrightarrow \frac{A_o}{2} = A_o.e^{-\Lambda.t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda.t} \Leftrightarrow 2 = e^{\Lambda.t} \Leftrightarrow \ln 2 = \Lambda.t \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{t_{1/2} = \frac{ln2}{\Lambda}} \qquad (1.46)$$

3. ***Εκθετική μείωση*** για την ενέργεια και το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης σημαίνει ότι σε κάθε περίοδο έχουμε μείωση και κατά το ίδιο ποσοστό και όχι κατά το ίδιο ποσό.

Αν π.χ. σε μια φθίνουσα ταλάντωση ο Α.Α.Τ. έχει την χρονική στιγμή t=0 ενέργεια E_o=100 Joule και μετά από μια περίοδο, την χρονική στιγμή t=T, έχει ενέργεια E_1=90 Joule έχοντας χάσει το 10% της αρχικής του ενέργειας, την χρονική στιγμή t=2.T θα έχει χάσει το 10% των 90 Joule και θα του έχει απομείνει ενέργεια E_2=81 Joule, ενώ τη στιγμή t=3.T θα του έχει απομείνει ενέργεια E_3=72,9 Joule.

4. Ο ρυθμός με τον οποίο χάνεται ενέργεια λόγω αποσβέσεων θα είναι:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = -b.\upsilon.\upsilon \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{\frac{dE}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = -b.\upsilon^2} \qquad (1.47)$$

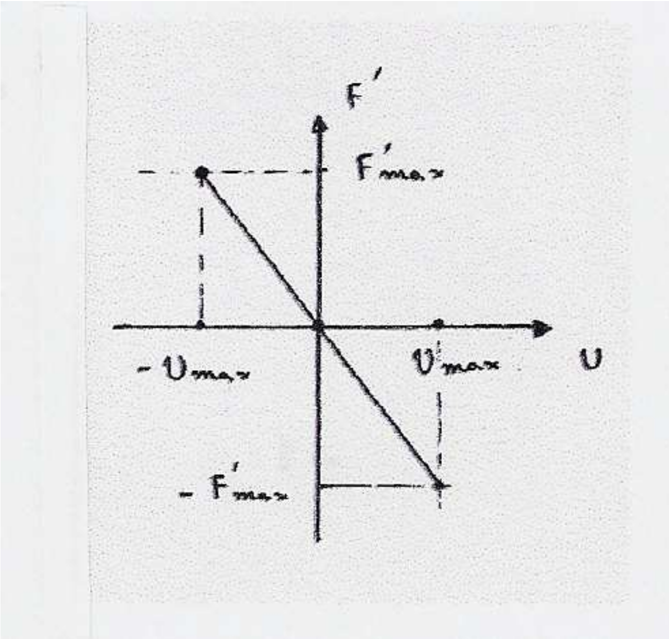
5. Προσοχή πρέπει να δοθεί στους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Γενικά:

$$\mathbf{\frac{dK}{dt} = \sum F.\upsilon \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = (-b.\upsilon - D.x).\upsilon \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -b.\upsilon^2 - D.x.\upsilon} \qquad (1.48)$$

$$\frac{dU}{dt} = -F_{\varepsilon\pi.}\upsilon \Leftrightarrow \mathbf{\frac{dU}{dt} = D.x.\upsilon} \qquad (1.49)$$

Παρατηρούμε επομένως ότι $\frac{dK}{dt} \neq \frac{dU}{dt}$.

6. Λόγω της σχέσης F΄= -b.υ η γραφική παράσταση της F΄=f(t) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα του χρόνου σε σχέση με την γραφική παράσταση της υ=f(t), ενώ η γραφική παράσταση της F΄=f(υ) θα είναι:

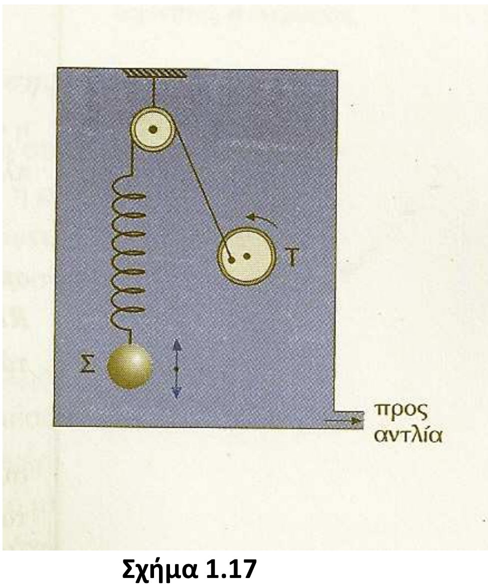


Σχήμα 1.16

1.6 ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Α. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ

Σε πολλές περιπτώσεις φθινουσών ταλαντώσεων, θέλουμε να διατηρήσουμε το πλάτος της ταλάντωσης σταθερό. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν περιοδικά προσφέρουμε στο σύστημα ενέργεια έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια να παραμένει σταθερή (σχήμα 1.17). Τέτοιες ταλαντώσεις ονομάζονται εξαναγκασμένες και η περιοδική δύναμη η οποία προσφέρει στο σύστημα την ενέργεια, ονομάζεται διεγέρτης και είναι της μορφής $F=Fo.συν(ω_{εξ}t)$.



Σχήμα 1.17

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης σε μια εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση θα είναι:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Leftrightarrow F_o.συν(ω_{εξ}t) - b.υ - D.x = m.a \Leftrightarrow m.\frac{dυ}{dt} + b.υ + D.x = F_{ΕΞ} \qquad (1.50)$$

Το κύριο χαρακτηριστικό στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις είναι ότι το ταλαντούμενο σύστημα, είτε είναι μηχανικό είτε ηλεκτρομαγνητικό, ταλαντώνεται με την συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη και όχι με την συχνότητα με την οποία το σύστημα θα ταλαντωνόταν ελεύθερα (χωρίς επίδραση εξωτερικού αιτίου), η οποία βέβαια διαφέρει από την συχνότητα της ελεύθερης αμείωτης ταλάντωσης, την οποία ονομάζουμε **ιδιοσυχνότητα** (και αντίστοιχα την περίοδο, **ιδιοπερίοδο**), διότι είναι συχνότητα ελεύθερης φθίνουσας ταλάντωσης και ήδη έχουμε δει ότι η ύπαρξη αποσβέσεων μεταβάλλει την συχνότητα μιας ελεύθερης ταλάντωσης (σχέση 1.45).

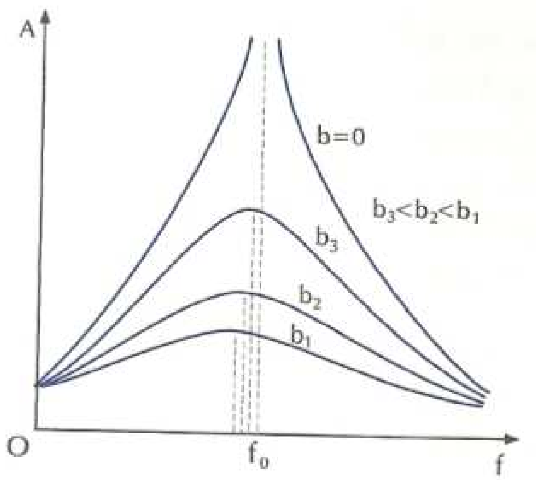
Το πλάτος σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση μεταβάλλεται με την συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη και γίνεται μέγιστο όταν αυτή γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται **συντονισμός.**

Γενικά ***συντονισμός*** ονομάζεται η κατάσταση κατά την οποία το ταλαντούμενο σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση μέγιστης απορρόφησης ενέργειας από τον διεγέρτη κάτι το οποίο επιτυγχάνεται όταν η συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη γίνει ίση με την συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης του ταλαντούμενου συστήματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Κατά τον συντονισμό και οι απώλειες ενέργειας μεγιστοποιούνται , διότι μεγιστοποιείται το πλάτος της ταλάντωσης και άρα και η δύναμη απόσβεσης.

2. Το διάγραμμα που δείχνει την μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης για διάφορες συχνότητες του εξωτερικού διεγέρτη και για διάφορες σταθερές απόσβεσης είναι το ακόλουθο:

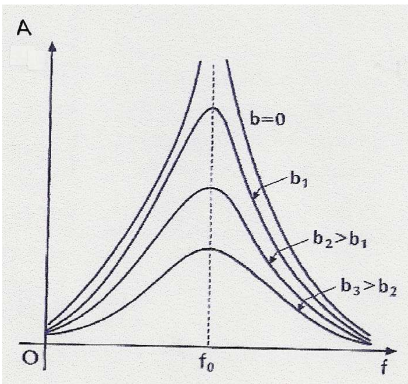


Σχήμα 1.18

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνονται οι αποσβέσεις μειώνονται τα μέγιστα πλάτη της ταλάντωσης και επίσης ότι ο συντονισμός συμβαίνει για όλο και μικρότερες συχνότητες, αφού η συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης μειώνεται με την αύξηση των αποσβέσεων μέσω της σχέσεως:

$$f = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{D}{m} - (\frac{b}{2.m})^2} \qquad (1.45)$$

Να τονίσουμε όμως και πάλι ότι η παραπάνω σχέση δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, στο οποίο επίσης αφού η μεταβολή της συχνότητας ελεύθερης ταλάντωσης με το b θεωρείται πολύ μικρή, δεν απεικονίζεται στα διαγράμματα A=f(f) (πλάτους-συχνότητας) η μεταβολή της συχνότητας συντονισμού. Έχουμε δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα:



Σχήμα 1.19

3. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις παρότι είναι αμείωτες ταλαντώσεις, οι μέγιστες τιμές της κινητικής και δυναμικής ενέργειας δεν ταυτίζονται διότι:

$$K_{max} = \frac{1}{2}.m.\upsilon_{max}^{2} \Leftrightarrow \mathbf{K_{max} = \frac{1}{2}.m.\omega_{\varepsilon\xi}^{2}.A^{2}} \qquad (1.51)$$

και

$$U_{max} = \frac{1}{2}.D.A^{2} \Leftrightarrow \mathbf{U_{max} = \frac{1}{2}.m.\omega_{o}^{2}.A^{2}} \qquad (1.52)$$

Προφανώς θα έχουμε:

i) Αν $\omega_{\varepsilon\xi}>\omega_o$ τότε $\mathbf{K_{max}>U_{max}}$ **,** και το σώμα που ταλαντώνεται χάνει ενέργεια καθώς κινείται από την Θ.Ι. προς τις ακραίες θέσεις.

ii) Αν $\omega_{\varepsilon\xi}<\omega_o$ τότε $\mathbf{K_{max}<U_{max}}$ **,** και το σώμα που ταλαντώνεται κερδίζει ενέργεια καθώς κινείται από την Θ.Ι. προς τις ακραίες θέσεις.

iii) Αν $\omega_{\varepsilon\xi}=\omega_o$ τότε $\mathbf{K_{max}=U_{max}}$ όταν έχουμε βέβαια συντονισμό.

4. Ο ρυθμός προσφοράς με τον οποίο ο εξωτερικός διεγέρτης δίνει ενέργεια στο σώμα που εκτελεί α.α.τ. είναι:

$$\mathbf{\frac{dW_F}{dt} = F_{E\Xi.}.\upsilon} \qquad (1.53)$$

και πρέπει να σημειωθεί ότι σε ορισμένες χρονικές στιγμές της ταλάντωσης θα έχουμε τον εξωτερικό διεγέρτη να αφαιρεί ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα.

5. Προσοχή πρέπει να δοθεί και πάλι στους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Γενικά:

$$\mathbf{\frac{dK}{dt} = \sum F.\upsilon \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = (F_o.\sigma\upsilon\nu(\omega_{\varepsilon\xi}.t) - b.\upsilon - D.x).\upsilon \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\frac{dK}{dt} = F_{\varepsilon\xi}.\upsilon - b.\upsilon^{2} - D.x.\upsilon} \qquad (1.54)$$

$$\frac{dU}{dt} = -F_{\varepsilon\pi.}\upsilon \Leftrightarrow \mathbf{\frac{dU}{dt} = D.x.\upsilon} \qquad (1.55)$$ και επομένως

$$\mathbf{\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = F_{\varepsilon\xi}.\upsilon - b.\upsilon^{2}} \qquad (1.56)$$

Επομένως και πάλι παρατηρούμε ότι $\mathbf{\frac{dK}{dt}} \neq -\mathbf{\frac{dU}{dt}}$.

Σημείωση:

Μπορεί να αποδειχθεί ότι σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση σε μία περίοδο, η ενέργεια που απορροφάται από το ταλαντούμενο σύστημα (που προφανώς θα είναι ίση με την καταναλισκόμενη από τις τριβές ή τις ωμικές αντιστάσεις) θα είναι:

$$\mathbf{W=\pi.A_o^2.b.\omega} \qquad (1.57)$$

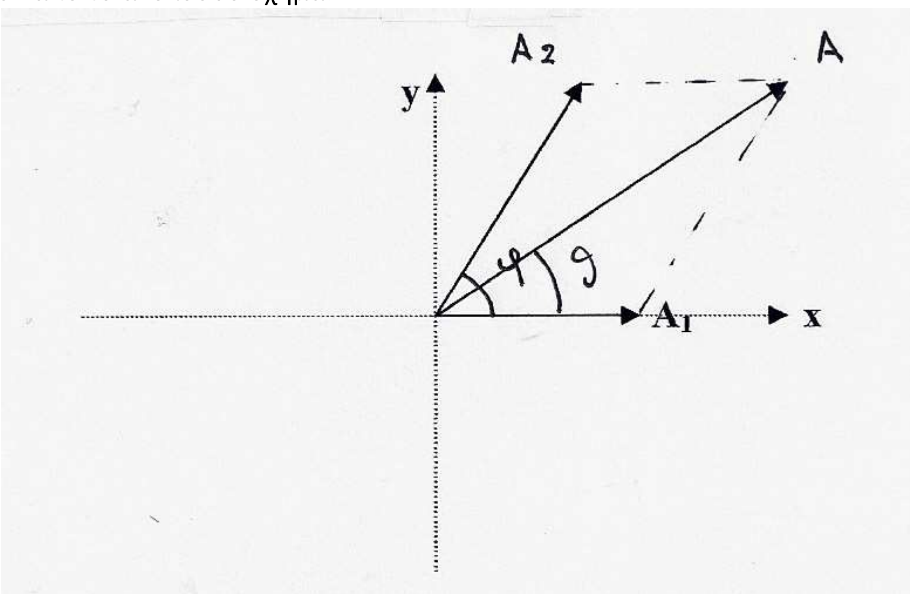
1.7 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Α. ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ Α.Α.Τ. ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ

Έστω ένα σώμα που πραγματοποιεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ. οι οποίες έχουν την ίδια συχνότητα γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας στην ίδια διεύθυνση με εξισώσεις:

$$\mathbf{x_1=A_1.\eta\mu\omega t} \quad \text{και} \quad \mathbf{x_2=A_2.\eta\mu(\omega t+\phi)} \qquad (1.58)$$

Κάθε ταλάντωση μπορεί να παρασταθεί με ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκους ίσου με το πλάτος της, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ίση με την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης. Επομένως οι παραπάνω ταλαντώσεις μπορούν να παρασταθούν από το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.20

Η συνιστάμενη ταλάντωση που θα εκτελεί το σώμα θα έχει εξίσωση:

$$\mathbf{x=A.\eta\mu(\omega t+\theta)} \qquad (1.59)$$

όπου μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2.A_1.A_2.\sigma\upsilon\nu\phi} \quad (1.60) \qquad \text{και} \qquad \varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2.\eta\mu\varphi}{A_1+A_2.\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (1.61)$$

Διερεύνηση:

α. Αν $\phi=0^o$ τότε οι ταλαντώσεις είναι συμφασικές και θα ισχύει $A=A_1+A_2$ και $\theta=0$.

β. Αν $\phi=180^o$ τότε οι ταλαντώσεις παρουσιάζουν αντίθεση φάσης και θα ισχύει $A=|A_1 - A_2|$ και η αρχική φάση θα είναι $\theta=0$ ή $\theta=\pi$ ανάλογα με το αν είναι μεγαλύτερο το μέτρο του A_1 ή του A_2 αντίστοιχα.

γ. Αν φ=90° τότε $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{A_2}{A_1}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Στην γενικότερη περίπτωση που και οι δύο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση, δηλαδή εξισώσεις της μορφής:

$$\mathbf{x_1=A_1.\eta\mu(\omega t+\phi_1)} \qquad \textbf{και} \qquad \mathbf{x_2=A_2.\eta\mu(\omega t+\phi_2)}$$

τότε ως διαφορά φάσης θεωρούμε την ποσότητα φ=$|\varphi_2 - \varphi_1|$, οπότε η γωνία θ που υπολογίζεται από τη σχέση 1.61, δεν θα είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης αλλά η γωνία που θα σχηματίζει το διάνυσμα της συνισταμένης ταλάντωσης με το διάνυσμα A_1. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την γωνία μεταξύ του συνισταμένου διανύσματος και του θετικού ημιάξονα xx΄ **και αυτή είναι η αρχική φάση της συνιστάμενης ταλάντωσης**.

Σε αυτήν την περίπτωση είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός των στρεφόμενων διανυσμάτων για την επίλυση της άσκησης.

2. Η σχέση (1.60) αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με το όρο ½ .D αφού υψώσουμε πρώτα στο τετράγωνο, γίνεται:

$$\frac{1}{2}.D.A^2 = \frac{1}{2}.D.A_1^{\,2} + \frac{1}{2}.D.A_2^{\,2} + D.A_1.A_2.\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E = E_1 + E_2 + D.A_1.A_2.\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (1.62)$$

Προφανώς αν φ=π/2 τότε συνφ=0 και η σχέση (1.62) γίνεται:

$$\mathbf{E = E_1 + E_2}$$

Β. ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ Α.Α.Τ. ΜΕ ΙΔΙΟ ΠΛΑΤΟΣ ΚΑΙ ΛΙΓΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ.

Έστω δύο Α.Α.Τ. με εξισώσεις:

$$\mathbf{x_1=A.\eta\mu\omega_1 t} \ \text{ και } \ \mathbf{x_2=A.\eta\mu\omega_2 t} \qquad (1.63)$$

Η συνιστάμενη ταλάντωση θα έχει εξίσωση:

$$\mathbf{x = x_1 + x_2 = A.(\eta\mu\omega_1.t + \eta\mu\omega_2.t)} \Leftrightarrow x = A.2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1.t - \omega_2.t}{2}.\eta\mu\frac{\omega_1.t + \omega_2.t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 2.A.\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}.t).\eta\mu(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.t)} \qquad (1.64)$$

Αν $\omega_1 \approx \omega_2$ τότε ο όρος ω_1-ω_2 μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από τον όρο ω_1+ω_2 με αποτέλεσμα η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει μια ιδιόμορφη περιοδική κίνηση (διακρότημα) με πλάτος την ποσότητα:

$$\mathbf{A' = 2A.\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}.t)\right|} \qquad (1.65),$$

η οποία μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο και γωνιακή συχνότητα την ποσότητα:

$$\mathbf{\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \qquad (1.66)$$

Η συνιστάμενη κίνηση **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Α.Α.Τ.** αλλά μια ιδιόμορφη περιοδική κίνηση η οποία ονομάζεται ***ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ*** **(Σχήμα 1.21).**

Η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$f=\frac{\overline{\omega}}{2.\pi}=\frac{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}{2.\pi}=\frac{\frac{2\pi f_1+2\pi f_2}{2}}{2.\pi}\Leftrightarrow f=\frac{f_1+f_2}{2}$$ οπότε η περίοδος της είναι

$$\mathbf{T=\frac{2}{f_1+f_2}} \qquad (1.67)$$

Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο μέγιστα ή ελάχιστα του πλάτους λέγεται *περίοδος διακροτήματος (T_δ).*

Μέγιστο πλάτος έχουμε όταν:

$$A' = 2.A \Leftrightarrow \left|\,\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}}{\mathbf{2}}\mathbf{.t}\,\right| = \mathbf{1} \Leftrightarrow \left|\frac{\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}}{\mathbf{2}}\mathbf{.t}\right| = \mathbf{k.}\boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow \mathbf{t}=\frac{\mathbf{2.k.}\boldsymbol{\pi}}{|\,\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}\,|} \Leftrightarrow \mathbf{t_1}=\frac{\mathbf{2.}\boldsymbol{\pi}}{|\,\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}\,|}$$

για k=1 και αντίστοιχα για k=2: $t_2=\dfrac{4\pi}{|\,\omega_1-\omega_2\,|}$. Επομένως:

$$T_\delta=|\,t_2-t_1\,|=\frac{2.\pi}{|\,\omega_1-\omega_2\,|}=\frac{2\pi}{|\,2\pi f_1-2\pi f_2\,|}=\frac{1}{|\,f_1-f_2\,|}\Leftrightarrow\frac{1}{f_\delta}=\frac{1}{|\,f_1-f_2\,|}\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f_\delta=|f_1-f_2|} \qquad (1.68)$$

όπου f_δ η συχνότητα του διακροτήματος που δίνει τον αριθμό των μεγίστων ή μηδενισμών του πλάτους στη μονάδα του χρόνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

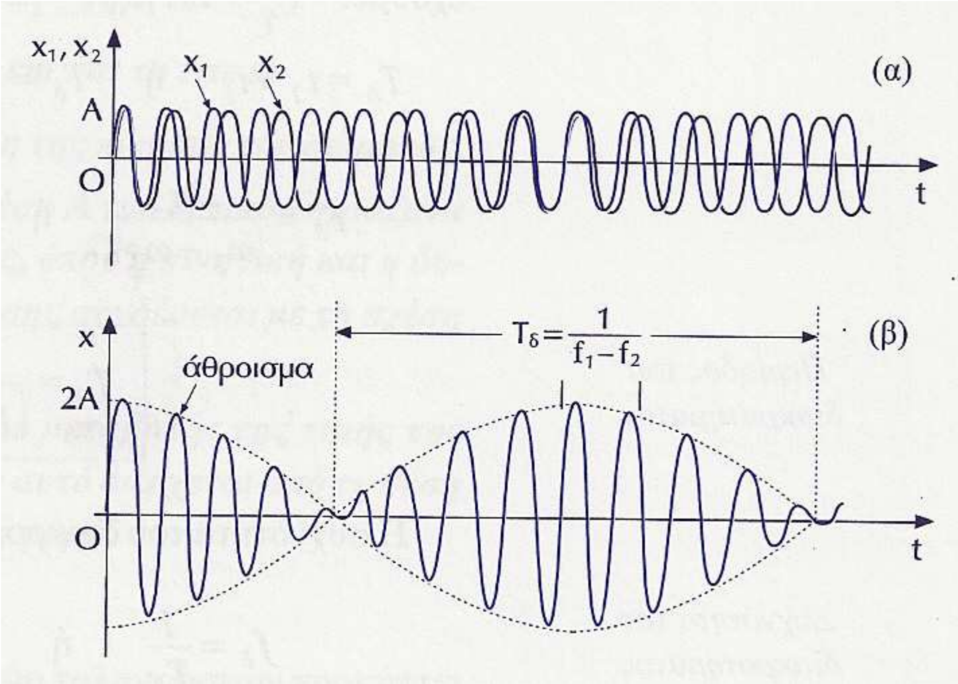
Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων που συμμετέχουν στο διακρότημα σε χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$|\Delta\varphi|=|\omega_1.t-\omega_2.t|=|2\pi.f_1-2\pi.f_2|.t=2\pi.|f_1-f_2|.t\Leftrightarrow|\Delta\varphi|=\frac{2\pi.t}{T_\delta} \qquad (1.69)$$

Επομένως θα έχουμε:

i) Αν $t=k.T_\delta$ η σχέση (1.69) δίνει $|\Delta\varphi|=k.2\pi$ με k=0, 1, 2,..........
δηλαδή μέγιστη απομάκρυνση (2.Α κατά απόλυτη τιμή).

ii) Αν $t=\dfrac{(2.k+1).T_\delta}{2}$ η σχέση (1.69) δίνει $|\Delta\varphi|=(2.k+1).\pi$ με k=0, 1, 2,..........
δηλαδή ελάχιστη απομάκρυνση (δηλαδή μηδέν).



Σχήμα 1.21

Σημείωση:

Για να δείξουμε την σχέση 1.64 χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του τριγωνομετρικού μετασχηματισμού:

$$ημα + ημβ = 2.συν\frac{α - β}{2}.ημ\frac{α + β}{2} \quad (1.70)$$