ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΣΤ. ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ- ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

69 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Ένας ομογενής κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο μεταβλητής γωνίας κλίσης φ. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_s, να βρεθούν οι τιμές της γωνίας φ για τις οποίες δεν έχουμε ολίσθηση. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_K=(1/2).m.R^2$, όπου m η μάζα του και R η ακτίνα του.
(Απ.: εφφ<3μ_s)

70. Η λεπτή ράβδος του ακόλουθου σχήματος έχει μήκος L=2 m, μάζα M=2 kg και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Η ράβδος ισορροπεί αρχικά σε οριζόντια θέση με την βοήθεια αβαρούς, μη εκτατού νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο Ζ της ράβδου στο οποίο είναι δεμένο το νήμα απέχει από το άκρο Ο απόσταση L_1=1,25 m.

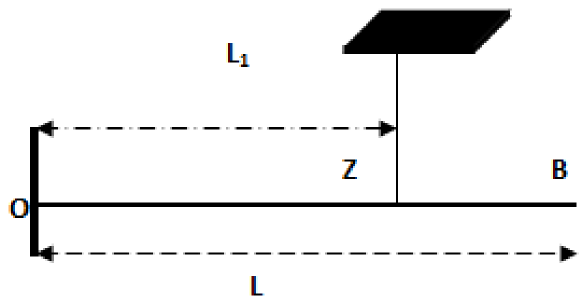
α. Να υπολογίσετε την τάση του νήματος καθώς και τη δύναμη που δέχεται η ράβδος στο σημείο Ο.

β. Κόβουμε το νήμα. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης που αποκτά η ράβδος:

i) τη χρονική στιγμή που κόψαμε το νήμα,

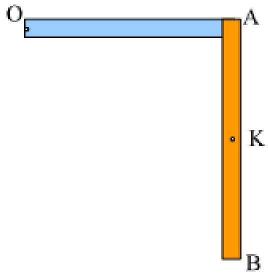
ii) τη χρονική στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο που διέρχεται από το άκρο Ο γωνία 60^o.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τον τύπο: $I = \frac{1}{3}.M.L^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με g=10 m/s^2.



(Απ.: 16 N, 4 N, 7,5 rad/s^2, $3{,}75\sqrt{3}\mathrm{rad/s^2}$)

71 (YLIKONET). Οι ομογενείς ράβδοι ΟΑ και ΑΒ του ακόλουθου σχήματος, έχουν ίσες μάζες m=3 kg και μήκη l_1=4 m και l_2=6 m αντίστοιχα και είναι συγκολλημένες στο άκρο τους Α.



Το σύστημα μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο Ο. Φέρνουμε το σύστημα σε τέτοια θέση ώστε η ράβδος ΟΑ να είναι οριζόντια και την αφήνουμε να κινηθεί.

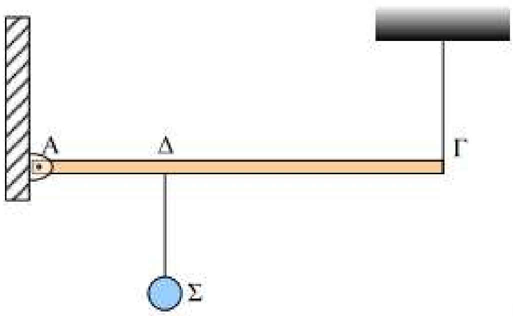
Αν η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσο της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{12}.m.l^2$, να βρεθούν:

α. Η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.

β. Η αρχική επιτάχυνση του μέσου Ο της ράβδου ΑΒ και να σχεδιαστεί στο σχήμα.

(Απ.: 1,8 rad/s^2, 9 rad/s)

72 (YLIKONET). Μία ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας m=10 kg και μήκους l=6 m είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, ενώ στο άκρο της Γ είναι δεμένη με κατακόρυφο νήμα. Στο σημείο Δ της δοκού, όπου (ΑΔ)=2 m έχουμε κρεμάσει με νήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα, μια μάζα m_1=6 kg.



Κάποια στιγμή το νήμα στο άκρο Γ κόβεται. Για αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρεθούν:

α) η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού και

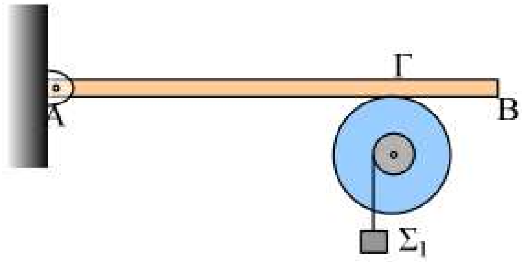
β) η επιτάχυνση της σφαίρας Σ.

Αν (ΑΔ)=5 m ποιες θα ήταν οι αντίστοιχες απαντήσεις;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της $I = \frac{1}{3}.m.l^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 2,9 rad/s^2, 5,8 m/s^2, 2,5 rad/s^2)

73 (YLIKONET). Ένα στερεό Κ αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που συμπίπτει με τον άξονα των δύο κυλίνδρων, ακτίνων R=0,5 m και r=0,2 m. Γύρω από τον κύλινδρο με την μικρότερη ακτίνα έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα στο κάτω μέρους του οποίου έχουμε δέσει σώμα μάζας 2 kg. Το στερεό Κ ισορροπεί, όταν πάνω του στηρίζεται μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους 4 m και μάζας 6 kg, η οποία συνδέεται με άρθρωση στο άκρο της Α. Η δοκός ισορροπεί οριζόντια ακουμπώντας στον κύλινδρο στο σημείο Γ όπου (ΓΒ)=1 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και στερεού Κ είναι μ=0,3.



α. Να βρεθεί η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Λύνουμε το σώμα $Σ_1$ και τοποθετούμε άλλο σώμα Σ μάζας 10 kg στην θέση του, το οποίο αφήνουμε να κινηθεί, από ύψος 2 m πάνω από το έδαφος. Το σώμα Σ χρειάζεται 2 s για να φτάσει στο έδαφος.

β. Να αποδειχθεί ότι η κίνηση του $Σ_1$ είναι ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη.

γ. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού Κ κατά την διάρκεια της πτώσης.

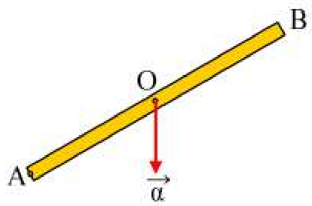
δ. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού Κ.

ε. Τι ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του στερεού Σ, μετατρέπεται σε θερμότητα εξαιτίας της τριβής;

Θεωρείστε την δυναμική ενέργεια μηδενική στο επίπεδο του εδάφους και την επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 20 N και 8 N, 5 rad/s^2, 2,4 kg.m^2, 30%)

74 (YLIKONET). Μια ομογενής ράβδος ΑΒ στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α. Κάποια στιγμή διέρχεται από την θέση που φαίνεται στο σχήμα και εκείνη τη στιγμή το κέντρο μάζας της Ο έχει κατακόρυφη επιτάχυνση μέτρου 7,5 m/s^2 με φορά προς τα κάτω.



α. Να βρεθεί η επιτάχυνση του άκρου Β στην θέση αυτή κατά μέτρο και κατεύθυνση.

β. Να αποδειχθεί ότι η μοναδική ροπή που ασκείται την στιγμή αυτή είναι η ροπή του βάρους.

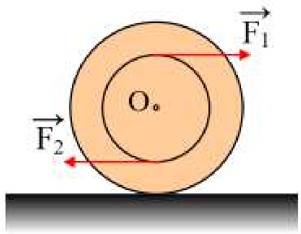
γ. Αν η μοναδική δύναμη, εκτός του βάρους, που ασκείται στη ράβδο είναι η δύναμη του άξονα περιστροφής, να αποδείξετε ότι αυτή η δύναμη είναι ίση με το ¼ του βάρους της ράβδους.

δ. Αν το μήκος της ράβδου είναι 2 m και στην θέση αυτή σχηματίζει γωνία θ με ημθ=0,3 με την οριζόντια διεύθυνση, να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής $I=\frac{1}{3}.m.l^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 15 m/s^2, mg/4 , 1,5 rad/s)

75 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Ένας τροχός ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή, δέχεται μέσω κατάλληλου μηχανισμού, ένα ζεύγος οριζοντίων σταθερών δυνάμεων με μέτρα $F_1=F_2=30$ N, οι οποίες ασκούνται σε σημεία που απέχουν απόσταση $r=R/2$ από το κέντρο του τροχού, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η μάζα του τροχού είναι ίση με 20 kg και η ακτίνα του R=0,4 m.



α) Σχεδιάστε στο σχήμα την ασκούμενη τριβή και δικαιολογήστε την κατεύθυνσή της.

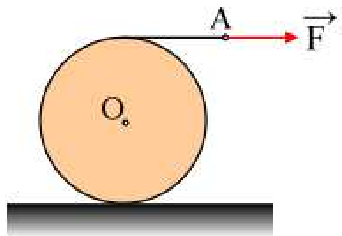
β) Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού.

γ) Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής για να μπορεί να κυλίεται με τον παραπάνω τρόπο ο τροχός;

Δίνεται για τον τροχό, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του, $I_{cm}=\frac{1}{2}.m.R^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 1 m/s^2, 2,5 m/s^2, 0,1)

76 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Γύρω από τον τροχό του παρακάτω σχήματος, μάζας m=2kg, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο Α του οποίου, ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη F=3N. Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, και η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής δίνεται από τη σχέση $I_{cm}=\frac{1}{2}.m.R^2$, να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές ή λαθεμένες δίνοντας σύντομες εξηγήσεις.



α) Ο τροχός θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση, από αυτήν που θα αποκτούσε ένα άλλο σώμα, ίσης μάζας, το οποίο θα ολίσθαινε σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση της δύναμης F.

β) Ο τροχός αποκτά επιτάχυνση $α_{cm}$=2 m/s^2.

γ) Το σημείο Α, εφαρμογής της δύναμης F έχει επιτάχυνση 4 m/s^2.

δ) Στον τροχό ασκείται στατική τριβή με φορά προς τα δεξιά.

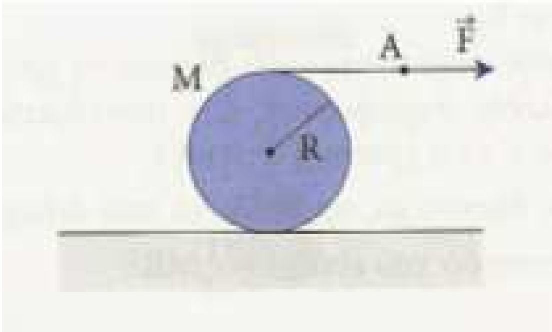
ε) Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι μεγαλύτερος από 0,05.

77. Γύρω από τον τροχό του ακόλουθου σχήματος, μάζας Μ=4 kg και ακτίνας R=0,2 m, είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί, στο ελεύθερο άκρο του οποίου ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=12 N. Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, να βρείτε:

α. Την επιτάχυνση του κέντρου Κ του τροχού, τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και την επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$.

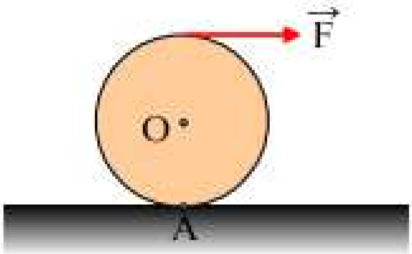
β. Τις τιμές του συντελεστή στατικής τριβής για τις οποίες ο τροχός θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται για τον τροχό I_{cm}=(1/2).M.R^2.



(Απ.: 4 m/s^2-20 rad/s^2-8 m/s^2, μ>0,1)

78. YLIKONET (κύλιση με ολίσθηση). Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο ακτίνας R=0,4 m και μάζας m=20 kg τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κατόπι τον τοποθετούμε σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τραβώντας το νήμα τη χρονική στιγμή t=0, ασκούμε δύναμη F=20 N όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



i. Υπολογίστε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου.
ii. Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;
iii. Για την χρονική στιγμή t_1=10 s να βρείτε:
α. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
β. Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
γ. Η ταχύτητα του σημείου επαφής Α του κυλίνδρου με το έδαφος.
δ. Η οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου καθώς και η γωνία περιστροφής του.

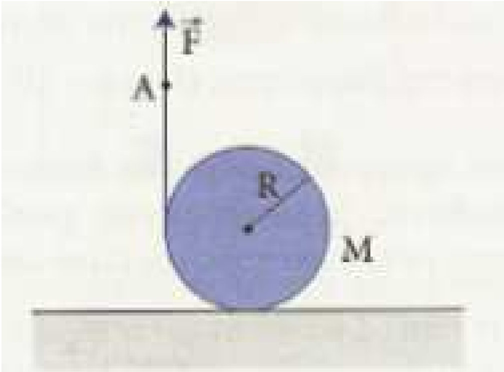
Δίνεται για τον κύλινδρο I_{cm}=(1/2).m.R^2.

(Απ.: 1 m/s^2, 5 rad/s^2, 10 m/s, 50 rad/s, -10 m/s, 50 m, 250 rad)

79. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος μάζας Μ=4 kg και ακτίνας R=0,5 m, στον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές, με εκτατό σχήμα. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη σταθερή δύναμη $\vec{F}$, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων}$=4 rad/s^2. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος,
β. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$,
γ. το μέτρο της κάθετης αντίδρασης του δαπέδου που δέχεται ο κύλινδρος,
δ. το συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του οριζοντίου δαπέδου, αν δίνεται ότι η τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ που υπολογίσατε στο ερώτημα (β) είναι η μέγιστη δυνατή, ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεών του υπολογίζεται από τον τύπο $I_{cm}=\frac{1}{2}$M.R^2. Η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με g=10 m/s^2.



(Απ.: 8 N, 12 N, 28 N, 2/7)

80 (Σαββάλας). Λεπτή κυκλική στεφάνη ακτίνας R και μάζας m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_o$, ενώ το κέντρο της είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή t_o=0 αφήνουμε τη στεφάνη, χωρίς να επηρεάσουμε την κίνηση της, σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης της στεφάνης με το επίπεδο, που το θεωρούμε ίσο με τον συντελεστή στατικής τριβής, είναι μ, να βρείτε:

α. Μετά από πόσο χρόνο η στεφάνη θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

β. Την απόσταση που θα διανύσει η στεφάνη στον χρόνο αυτό.

(Απ.: $\frac{\omega_o.R}{2.\mu..g}, \frac{\omega_o^2.R^2}{8.\mu..g}$ **)**

81. Μια σφαίρα, μάζας m και ακτίνας R, ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ (που τον θεωρούμε ίσο με τον συντελεστή στατικής τριβής). Τη χρονική στιγμή t_o=0 δίνουμε στον κέντρο της σφαίρας (με κατάλληλο χτύπημα) αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ προς τα δεξιά. Αν τη χρονική αυτή στιγμή η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι μηδέν:

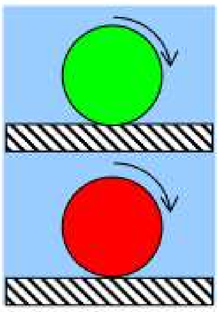
α. Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

β. Πόσο μετατοπίστηκε το κέντρο Κ της σφαίρας στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2$.

(Απ.: $\frac{2.\upsilon_o}{7.\mu.g}, \frac{12\upsilon_o^2}{49.\mu.g}$ **)**

82 (YLIKONET). Σε οριζόντιο επίπεδο αφήνονται δύο όμοιοι μάζας 2 kg και ακτίνας 0,2m. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ αυτών και του εδάφους είναι 0,2. Ο πράσινος έχει αρχική γωνιακή ταχύτητα 30 rad/s και ο κόκκινος 60 rad/s.



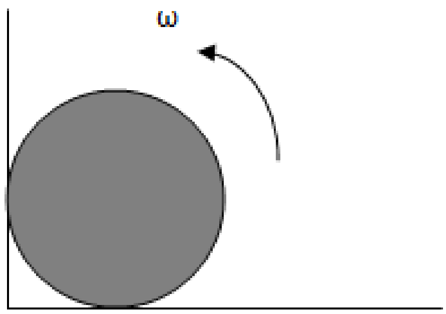
1. Ποια θα είναι η τελική ταχύτητα εκάστου;
2. Πόση απόσταση θα διανύσει έκαστος μέχρι να αποκτήσει την τελική του ταχύτητα;
3. Τι ταχύτητα θα έχει κάθε κύλινδρος όταν θα έχει διανύσει απόσταση 0,5m ;

4. Ποιο το έργο κάθε τριβής;

Η ροπή αδράνειας για κάθε κύλινδρο ως προς άξονα περιστροφής που περνά από κέντρο μάζας του και είναι παράλληλος με τον άξονα του κυλίνδρου $I = \frac{M.R^2}{2}$.

(Απ.: 2m/s και 4m/s, 1m και 4m, $\sqrt{2}$m/s , -12J και -48J)

83. Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος έχει ακτίνα R=0,3 m και βρίσκεται συνέχεια σε επαφή με τα δύο επίπεδα της ορθής γωνίας. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κυλίνδρου και των επιπέδων είναι μ=0,5 και η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου έχει μέτρο ω_o=80 rad/s, να βρείτε:



α. Τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

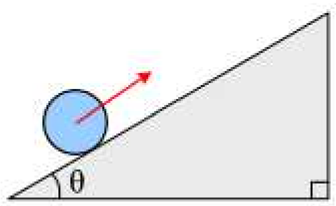
β. Μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει να περιστρέφεται ο κύλινδρος.

γ. Τη συνολική γωνία στροφής του κυλίνδρου από τη στιγμή που αφήνεται μέχρι να σταματήσει.

Δίνονται για τον κύλινδρο $I_{cm}=\frac{1}{2}m.R^2$ και g=10 m/s^2.

(Απ.: 40 rad/s^2, 2 s, 80 rad)

84 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Από την βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως θ, όπου ημθ=0,6 εκτοξεύεται ένας κύλινδρος (όπως στο σχήμα που ακολουθεί) με αρχική ταχύτητα υ_o=8 m/s και γωνιακή ταχύτητα ω_o, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Ο κύλινδρος έχει μάζα m=10 kg και ακτίνα R=0,4 m, ενώ η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από την εξίσωση $I = \frac{1}{2}.m.R^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας δίνεται g=10 m/s^2.



α) Ποια η αρχική του γωνιακή ταχύτητα;

β) Πόσο διάστημα θα διανύσει ο κύλινδρος κατά την άνοδό του, μέχρι να σταματήσει στιγμιαία;

γ) Πότε δέχεται μεγαλύτερη τριβή ο κύλινδρος, κατά την άνοδο ή την κάθοδο;

δ) Βρείτε την ταχύτητα του κυλίνδρου τις χρονικές στιγμές t_1 =1 s και t_2 =3 s.

(Απ.: 20 rad/s, 8 m, ίδια, +4 m/s, -4 m/s)

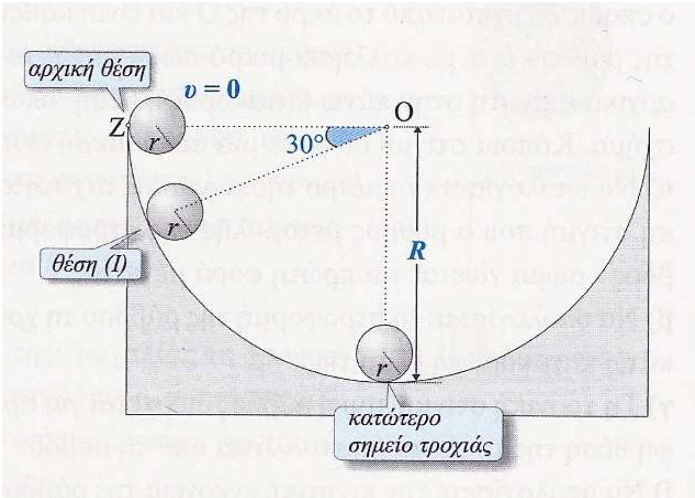
85. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται μια συμπαγής σφαίρα μάζας M=1,4 kg και ακτίνας r=0,25 m, που αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί στο εσωτερικού κυλίνδρου ακτίνας R=2 m, ο οποίος είναι στερεωμένος στο δάπεδο. Η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από την αρχική θέση που φαίνεται στο σχήμα και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται η σφαίρα σε συνάρτηση με τη γωνία φ που σχηματίζει κάθε στιγμή η επιβατική ακτίνα με την κατακόρυφη, από την αρχική θέση μέχρι και τη κατώτερη θέση,

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της σφαίρας τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση (Ι),

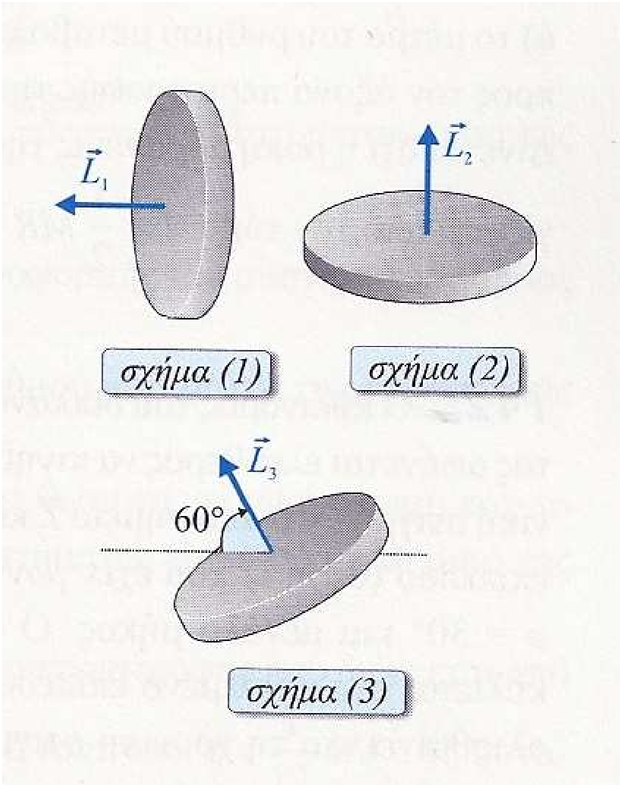
γ. το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από τον κύλινδρο τη χρονική στιγμή που διέρχεται από την κατώτερη θέση αν έχει γωνιακή ταχύτητα 20 rad/s ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από τον τύπο: $\mathrm{I} = \frac{2}{5}.\mathrm{M}.\mathrm{r}^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας: g=10 m/s^2.



(Απ.: 4.ημφ, $\frac{100\sqrt{3}}{7}\mathbf{rad/s^2}$, 34 N)

86 (Παναγιωτακόπουλος). Ο δίσκος του σχήματος 1 έχει μάζα Μ, ακτίνα R=0,5 m και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=20 rad/s γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Μετακινούμε το δίσκο ώστε ο άξονάς του να γίνει κατακόρυφος (σχήμα 2), χωρίς να υπάρξει μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του. Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ του δίσκου ισούται με $5.\sqrt{2}\,\frac{kg.m^2}{s}$ ενώ η χρονική διάρκεια της μετακίνησης ισούται με Δt=0,5 s. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου καθώς και τη μάζα του M,

β. το μέτρο της σταθερής ροπής που ασκήθηκε στο δίσκο για να συμβεί η παραπάνω μετακίνηση,

γ. τη μεταβολή της στροφορμής $\Delta\vec{L}'$ του δίσκου, αν ο άξονας του περιστραφεί μόνο κατά γωνία 60° (σχήμα 3) από την αρχική του θέση (σχήμα 1) χωρίς να αλλάξει το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τον τύπο $I = \frac{1}{2}.M.R^2$.

(Απ.: $5\frac{kg.m^2}{s}$, $2\,kg$, $10\sqrt{2}\,N.s$, $5\frac{kg.m^2}{s}$ και 120^o)

87. Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας M=4 kg και ακτίνας R=0,5 m, στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1=100 rad/s. Ένα κομμάτι πλαστελίνη, μάζας m=1 kg, αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος και κολλάει στον δίσκο σε απόσταση d=0,4 m από το κέντρο του. Να βρείτε:

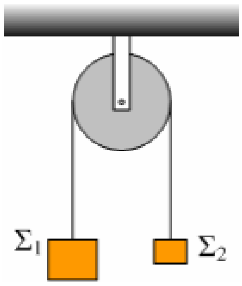
α. Την αρχική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

β. Την τελική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_K=\frac{1}{2}.M.R^2$.

(Απ.: 50 kg.m²/s, $\frac{2500}{33}$ kg.m²/s)

88 (YLIKONET). Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες 4 kg και 1 kg αντίστοιχα είναι δεμένα στα άκρα αβαρούς νήματος το οποίο περνά από τροχαλία ακτίνας 0,2 m και μάζας M. Για t=0 αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα να κινηθούν. Να βρεθεί η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1=4 s. Δίνεται g=10 m/s².



(Απ.: 24 kg.m²/s)

89. Η Γη, η οποία έχει μάζα $M_Γ$ και ακτίνα $R_Γ$, περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της με περίοδο T_O=24 h.

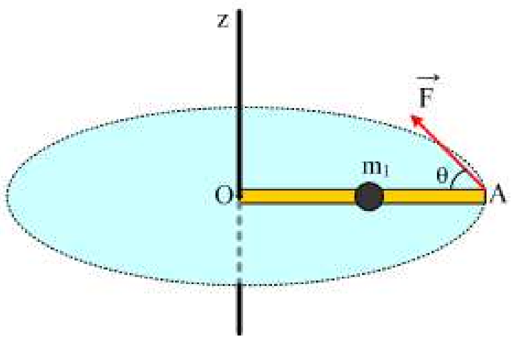
α. Αν η ακτίνα της Γης γίνει, λόγω συστολής, 0,9$R_Γ$, να βρείτε τη νέα της περίοδο T_1.

β. Αν ένα παγόβουνο σημειακής μάζας m (ως προς τις διαστάσεις της Γης) μετακινηθεί από τον Νότιο Πόλο σε σημείο με γεωγραφικό πλάτος 45^o, πόση θα γίνει η περίοδος της Γης;

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της είναι $I_{cm}=\frac{2}{5}.M.R^2$, όπου M η μάζα της και R η ακτίνα της.

(Απ.: 19,44 h, θα αυξηθεί)

90 (YLIKONET_3.4.3). Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος, έχει μήκος l=2 m και μάζα M=3 kg και μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα z ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο μέσο της ράβδου έχει προσαρτηθεί σώμα Σ που θεωρείται υλικό σημείο μάζας m_1=4 kg. Το στερεό Π που δημιουργήσαμε με τον τρόπο αυτό, ηρεμεί. Για t=0 ασκείται στο άκρο Α της ράβδου μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη F=5 N, της οποίας η διεύθυνση σχηματίζει σταθερή γωνία θ=30^o με την ράβδο όπως φαίνεται στο σχήμα, μέχρι την χρονική t_1=2 s που η δύναμη καταργείται. Αν για την ράβδο δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν: $I_{cm}=\frac{1}{12}.M.L^2$.



α. Να βρείτε την στροφορμή του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής.

Την στιγμή t_1 το σώμα Σ ξεκολλά από την θέση του και γλιστρώντας κατά μήκος της ράβδου καρφώνεται σε ένα μικρό καρφί που βρίσκεται στο άκρο Α της ράβδου. Να βρεθούν για την παραπάνω μετακίνηση:

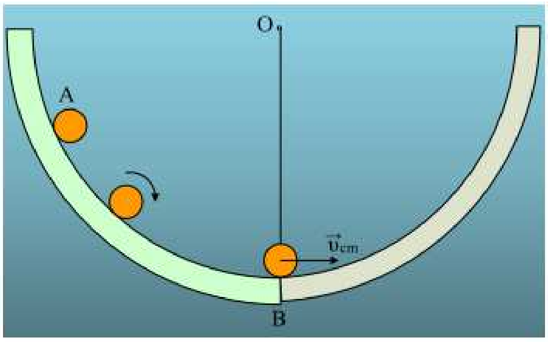
β. Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ ως προς το άκρο Ο.

γ. Η αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής της ράβδου.

δ. Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου στο χρονικό διάστημα που η δύναμη F ασκείται.

(Απ.: 10 kg.m²/s, 5 kg.m²/s, 5 kg.m²/s, $\frac{1,25}{2.\pi}$)

91 (YLIKONET). Μια σφαίρα μάζας m=0,5 kg και ακτίνας r=5 cm, αφήνεται να κινηθεί στο σημείο Α του αριστερού τεταρτοκυκλίου με το οποίο παρουσιάζει μικρή τριβή, με αποτέλεσμα να κινηθεί προς τα κάτω στρεφόμενη μεν, αλλά και ολισθαίνοντας. Έτσι φτάνει στην βάση των τεταρτοκυκλίων Β έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}$=2 m/s και γωνιακή ταχύτητα ω=20 rad/s, όπου και συνεχίζει την κίνησή της στο δεξιό τεταρτοκύκλιο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,4. Τα δύο τεταρτοκύκλια έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες R=1 m, ενώ η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της είναι I_{cm}=(2/5).m.R^2 και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=10 m/s². Για τη θέση αμέσως μόλις μπει στο δεξί τεταρτοκύκλιο, ζητούνται:



α. Η ιδιοστροφορμή (spin) της σφαίρας ως προς τον άξονά της.

β. Η τροχιακή στροφορμή ως προς άξονα xx΄ ο οποίος περνά από το κέντρο Ο της τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της.

γ. Η συνολική στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα xx΄.

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς:

i) τον άξονα ιδιοπεριστροφής της,

ii) τον άξονα xx΄.

(Απ.: 0,01 kg.m²/s, 0,95 kg.m²/s, 0,94 kg.m²/s, 0,142 kg.m²/s², 2,84 kg.m²/s²)

92. Δύο μικρά σώματα με μάζα m=0,05 kg το καθένα, είναι στερεωμένα στα άκρα μιας οριζόντιας ράβδου που έχει ασήμαντη μάζα και μήκος L=1,2 m. Η ράβδος στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο, με σταθερή συχνότητα f=10 Hz.

α. Να βρείτε τη στροφορμή του συστήματος των δύο μαζών ως προς το Ο.

β. Υποθέστε πως με κάποιο μηχανισμό που δεν δημιουργεί εξωτερικές ροπές, τα σώματα μετακινούνται ταυτόχρονα σε απόσταση l=0,3 m από το Ο. Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα περιστρέφεται τώρα η ράβδος;

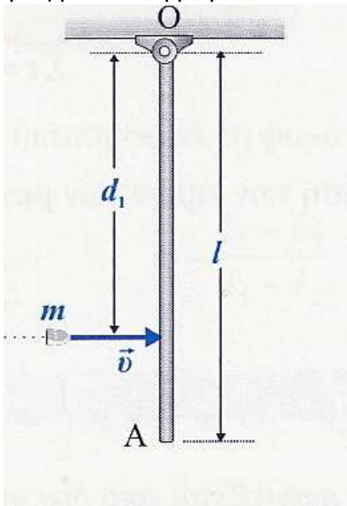
(Απ.: 2,26 J.s, 251 rad/s)

93. Η ράβδος ΟΑ του ακόλουθου σχήματος, μήκους l=1 m και μάζας M=4 kg, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Ο. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Σημειακή σφαίρα μάζας m=0,5 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=100 m/s και προσκρούει στη ράβδο στο σημείο Γ με (ΟΓ)=d_1=2.l/3. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει τη στροφική της κίνηση η ράβδος όταν η σφαίρα:

α. Εξέρχεται από το άλλο μέρος με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=20 m/s.

β. Σφηνώνεται στη ράβδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_A=\frac{1}{3}M.l^2$.
Ο χρόνος παραμονής της σφαίρας μέσα στη ράβδο όταν τη διαπερνά είναι αμελητέος.



(Απ.: 20 rad/s, 150/7 rad/s)

94. Σε μια παιδική χαρά υπάρχει μια ακίνητη κυκλική εξέδρα ακτίνας R=1 m, η οποία μπορεί να περιστρέφεται περί το κέντρο της Ο. Ένα παιδί μάζας m=20 kg τρέχει γύρω-γύρω με ταχύτητα υ=3 m/s και ξαφνικά πηδάει πάνω στην εξέδρα της οποίας η μάζα είναι M=80 kg. Αν οι τριβές θεωρηθούν αμελητέες να βρείτε:

α. Με ποια γωνιακή ταχύτητα αρχίζει να περιστρέφεται η εξέδρα;

β. Πόση ροπή, πρέπει να ασκηθεί στην εξέδρα, ώστε να σταματήσει να περιστρέφεται μετά από t=2 s;

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της εξέδρας είναι $I_o=\frac{1}{2}.M.R^2$.

(Απ.: 1 rad/s, 20 N.m)

95. Δύο οριζόντιοι δίσκοι στρέφονται γύρω από τον κοινό κατακόρυφο άξονα περιστροφής zz΄ με γωνιακές ταχύτητες αλγεβρικής τιμής ω_1= -2 rad/s και ω_2=1 rad/s. Κάποια στιγμή οι δίσκοι έρχονται σε επαφή και τελικά στρέφονται μαζί με κοινή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=0,5 rad/s. Αν ο επάνω δίσκος έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του I_1=0,5 kg.m^2, να βρείτε:

α. Την ροπή αδράνειας I_2 του κάτω δίσκου(γιατί υπάρχουν δύο τιμές)

β. Την στροφορμή του συστήματος πριν και μετά την επαφή των δίσκων. **(Απ.: 2,5 kg.m^2-0,5 kg.m^2, +1,5 J.s- -0,5 J.s)**

96. Μία λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ έχει μήκος l=2 m, μάζα M=3 kg και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Στο άκρο Α της ράβδου έχουμε στερεώσει σημειακή μάζα m=0,5 kg. Αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο από την οριζόντια θέση.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σημειακή μάζα τη χρονική στιγμή:

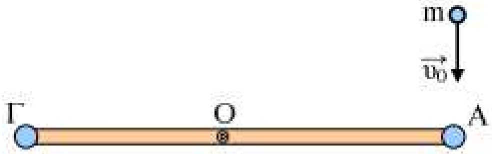
i) που η ράβδος βρίσκεται στην αρχική οριζόντια θέση,

ii) που η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία φ=30^o,

iii) που το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου ισούται με $\alpha_{γων}$=5 rad/s^2 .

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της ράβδου, της σημειακής μάζας m, καθώς και του συστήματος ράβδος – σημειακή μάζα τη χρονική στιγμή που η σημειακή μάζα έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου υ=4 m/s.
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτήν δίνεται από τον τύπο: $I = (1/12).M.l^2$.
(Απ.: 40 N.m, 20 N.m, 30 N.m, 8 kg.m²/s, 4 kg.m²/s, 12 kg.m²/s)

97 (YLIKONET). Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ με μήκος l=1 m και μάζα M=1,2 kg μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και διέρχεται από το μέσο της Ο. Στα δύο άκρα της ράβδου έχουμε στερεώσει δύο σφαιρίδια αμελητέων διαστάσεων, μάζας m=0,2 kg το καθένα. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Βλήμα μάζας m=0,2 kg αμελητέων διαστάσεων, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=10 m/s και ενσωματώνεται ακαριαία στο σφαιρίδιο στο άκρο Α της ράβδου. Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος, αμέσως μετά την κρούση.

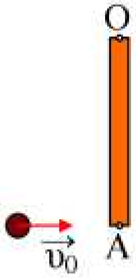
β. Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που χάθηκε κατά την κρούση.

γ. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος, αμέσως μετά την κρούση.

δ. Το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου στο άκρο Γ της ράβδου, τη στιγμή που αυτή γίνεται κατακόρυφη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο προς αυτή άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}.m.l^2$ και g=10 m/s².
(Απ.: 4 rad/s, 4/5, 4 rad/s², $\sqrt{6}$ m/s)

98 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Μια ράβδος μήκους l και μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μια μπάλα, ίδιας μάζας m, που θεωρείται υλικό σημείο κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, κάθετα προς τη ράβδο, με ταχύτητα $υ_o$=20 m/s και προσκολλάται στο άκρο Α της ράβδου. Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου Α αμέσως μετά την κρούση, όταν:

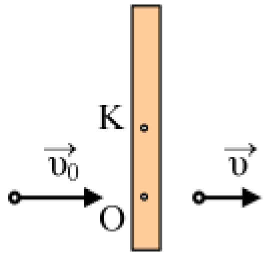


α) Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο Ο της ράβδου.

β) Η ράβδος είναι ελεύθερη να κινηθεί.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το μέσον της $I_{cm} = \frac{1}{12}.m.l^2$.
(Απ.: 40 m/s, 16 m/s)

99 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης ηρεμεί μια ομογενής σανίδα μήκους 4 m και μάζας M=3 kg. Ένα βλήμα μάζας m=0,1 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=200 m/s και διεύθυνση κάθετη στη σανίδα, κτυπά τη σανίδα σε σημείο O, το οποίο απέχει d=1 m από το ένα της άκρο, την διαπερνά και εξέρχεται με ταχύτητα υ=50 m/s.

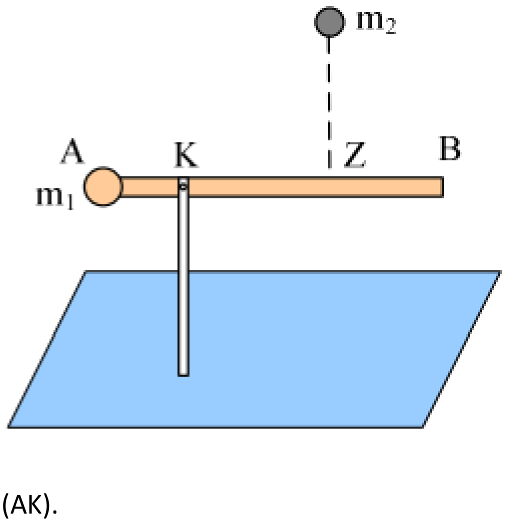


α) Βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σανίδας μετά τη κρούση.
β) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής που θα αποκτήσει η σανίδα.
γ) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σημείου O αμέσως μετά τη σύγκρουση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το μέσον της $I_{cm} = \frac{1}{12}.m.l^2$.

(Απ.: 5 m/s, 3,75 rad/s, 8,75 m/s)

100 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Λεπτή ομογενής ράβδος AB μήκους l=2 m και μάζας M=3 kg μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από ενδιάμεσο σημείο της K και είναι κάθετος σ' αυτή. Στο άκρο A έχουμε στερεώσει μικρό σώμα μάζας m_1=2 kg και η ράβδο ισορροπεί οριζόντια. Ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης, μάζας m_2=0,8 kg αφήνεται ελεύθερη από ύψος h=1,8 m πάνω από τη ράβδο, οπότε συγκρούεται και κολλάει σ' αυτή σε σημείο της Z. Αμέσως μετά τη στιγμή της σύγκρουσης ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος έχει μέτρο $\frac{dL}{dt} = 8\,kg.m^2/s^2$.



Να υπολογίσετε:
α) Την απόσταση (AK).
β) Την απόσταση (KZ).
γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την σύγκρουσή της με την πλαστελίνη.

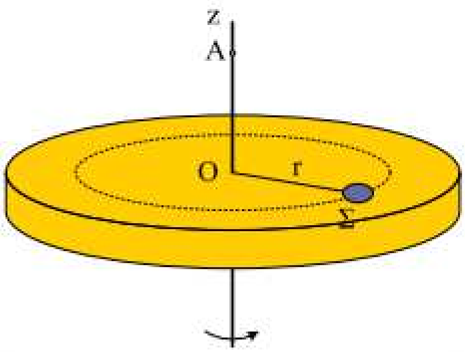
Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το μέσον της $I_{cm} = \frac{1}{12}.m.l^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g= 10m/s^2.

(Απ.: 0,6 m, 1 m, 1,6 rad/s)

101 (YLIKONET_3.4.10). Στο ακόλουθο σχήμα ένας οριζόντιος δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από κατακόρυφο άξονα z που περνά από το κέντρο του, ενώ ένα σημείο Σ, μάζας m, απέχει απόσταση r από το κέντρο O του δίσκου.

A) Σημειώστε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα και βρείτε τα μέτρα των αντίστοιχων μεγεθών:

i) Γωνιακή ταχύτητα του Σ.
ii) Γραμμική ταχύτητα του Σ.
iii) Στροφορμή του Σ ως προς το σημείο O.
iv) Στροφορμή του Σ ως προς τον (κατά μήκος του) άξονα z.



B) Έστω ένα σημείο του άξονα z, όπου (AO)=r.

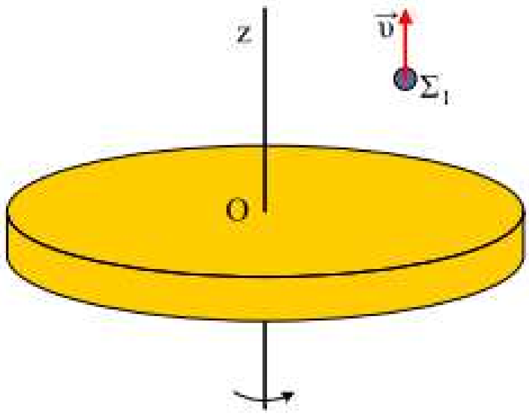
i) Σημειώστε στο σχήμα την στροφορμή του υλικού σημείου Σ ως προς A και υπολογίστε το μέτρο της.

ii) Υπολογίστε το μέτρο της προβολής της στροφορμής του Σ ως προς το A πάνω στον άξονα z.

iii) Δείξτε ότι η στροφορμή του υλικού σημείου Σ ως προς A δίνεται από την σχέση:

$$\vec{L} = I.\vec{\omega}$$

Γ) Ένα άλλο υλικό σημείο $Σ_1$ μάζας m_1 κινείται κατακόρυφα και κάποια στιγμή έχει ταχύτητα μέτρου υ, απέχοντας απόσταση r από τον άξονα περιστροφής του δίσκου (βλέπε το σχήμα που ακολουθεί).



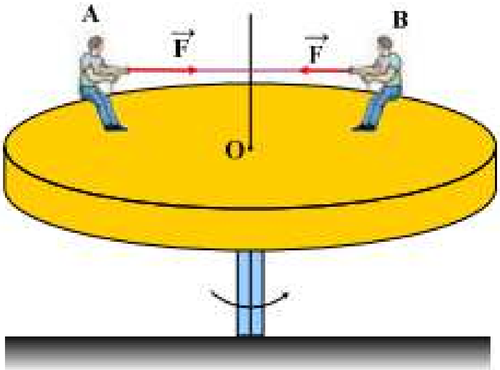
i) Σημειώστε στο σχήμα το διάνυσμα της στροφορμής του $Σ_1$ ως προς το σημείο O. Από ποια εξίσωση βρίσκουμε το μέτρο της;

ii) Πόση είναι η στροφορμή του $Σ_1$ ως προς (κατά) τον άξονα z;

iii) Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του $Σ_1$ ως προς το σημείο O. Να σχεδιάστε στο σχήμα το διάνυσμα του παραπάνω ρυθμού.

(Απ.: ω.r, m.ω.r^2, m.ω.r^2, m.ω.r$^2\sqrt{2}$, m$_1$.υ.r, m.g.r)

102 (YLIKONET_3.4.12). Μια κυκλική πλατφόρμα έχει τεθεί σε περιστροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_1=1 rad/s. Πάνω στην πλατφόρμα βρίσκονται δύο παιδιά μάζας 50 kg το καθένα, τα οποία εξασφαλίζουν την περιστροφή τους μαζί με την πλατφόρμα, τραβώντας ένα νήμα μήκους 4 m, όπως στο ακόλουθο σχήμα, με δύναμη μέτρου F=70 N. Τα παιδιά βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς το κέντρο Ο της πλατφόρμας. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ των υποδημάτων των παιδιών και της πλατφόρμας είναι μ_s=μ=0,3.



α) Να σχεδιάστε τα διανύσματα της τριβής που ασκούνται στα παιδιά και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

β) Σε μια στιγμή τα παιδιά τραβώντας το νήμα αρχίζουν να πλησιάζουν και σταματούν σε απόσταση 1 m από το Ο. Σε αυτή την θέση συνεχίζουν να τραβούν το νήμα ασκώντας του ίσου μέτρου δυνάμεις. Πόσο είναι τώρα το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κάθε παιδί;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς τον άξονα περιστροφής της I_Π=200 kg.m^2 και g=10 m/s^2.

(Απ.: ………)

Ζ. ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΤΗΝ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

103. Μια ομογενής σφαίρα, αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α και αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω=314 rad/s σε χρόνο t=10 s. Να βρείτε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$.

β. Τη ροπή που επιταχύνει τη σφαίρα.

γ. Το έργο της ροπής στη διάρκεια των 10 s.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο της είναι I_o=0,16 kg.m^2.

(Απ.: 31,4 rad/s^2, 5 N.s, 7888 J)

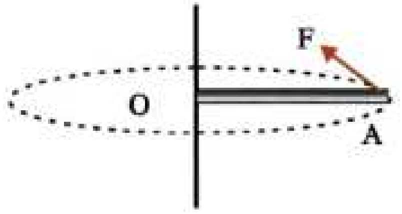
104. Ένας κυκλικός τροχός ακτίνας 0,25 m έχει ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα του 0,18 kg.m^2. Σε ένα τεστ, θέτουμε τον τροχό σε περιστροφή με αρχική συχνότητα (32/π) Hz και παρατηρούμε ότι αυτός τελικά σταματά αφού περιστραφεί για 640 s. Υπολογίστε: α. Τη γωνιακή επιβράδυνση του τροχού.

β. Τη ροπή της τριβής, που επιβραδύνει την περιστροφή του.

γ. Την ισχύ που απαιτείται για να περιστρέφεται ο τροχός με σταθερή συχνότητα (32/π) Hz.

(Απ.: 0,1 rad/s^2, 0,018 N.m, 1,152 W)

105. Η ομογενής ράβδος ΟΑ του ακόλουθου σχήματος, μήκος L=2 m και μάζας m=4 kg, είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο της Ο. Στο άκρο Α της ράβδου ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου F=20 N, που είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο. Αν η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη, να βρείτε:



α. Το έργο της δύναμης στην διάρκεια της πρώτης περιστροφής και στη διάρκεια της δεύτερης.

β. Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά από πέντε περιστροφές.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου στο τέλος της πρώτης και της τρίτης περιστροφής.

δ. Την ισχύ της δύναμης F στο τέλος της δεύτερης περιστροφής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής I=$\frac{1}{3}.m.l^2$.

(Απ.: 80π J, $\sqrt{150\pi}$ rad/s, 40 kg.m²/s², 80$\sqrt{15\pi}$ W)

106. Ομογενής δίσκος με μάζα m=40 kg και ακτίνα R=0,2 m στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_o=20 rad/s. Στην περιφέρεια του δίσκου ασκείται εφαπτομενικά μια δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου, η οποία αναγκάζει τον δίσκο να σταματήσει σε χρόνο t=5 s. Να βρείτε:

i) τη γωνιακή επιβράδυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ του δίσκου και το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$,

ii) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ μέχρι να σταματήσει ο δίσκος,

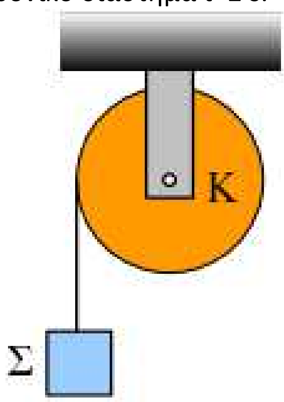
iii) τη στιγμιαία ισχύ της ροπής που ασκείται στον δίσκο την χρονική στιγμή t_1=2 s,

iv) τη μέση ισχύ της ροπής που επιβραδύνει τον δίσκο.

Δίνεται για τον δίσκο: $I_K = \frac{1}{2}.m.R^2$.

(Απ.: 16 N, 160 J, 38,4 W, 32 W)

107. Στην τροχαλία του σχήματος ακτίνας R=0,2 m, τυλίγεται αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου δένεται σώμα Σ μάζας m=1 kg. Η τροχαλία μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο της Κ. Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο, οπότε αποκτά ταχύτητα 4 m/s σε χρονικό διάστημα t=2 s.



α) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ και την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
β) Πόση είναι η κινητική ενέργεια της τροχαλίας την παραπάνω χρονική στιγμή;
γ) Ποιο το έργο της τάσης του νήματος στην τροχαλία στο χρονικό διάστημα των 2s;
δ) Ποια η ισχύς της τάσης του νήματος την χρονική στιγμή των 2 s;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής $I_{cm} = (1/2).m.R^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.
(Απ.: ……)

108 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Δύο αστροναύτες Α και Β, που ο καθένας έχει μάζα m=80 kg, είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους με σχοινί μήκους l=12 m και αμελητέας μάζας. Οι αστροναύτες βρίσκονται στο διάστημα και περιστρέφονται γύρω από το Κ του σχοινιού με γραμμική ταχύτητα μέτρου υ=10 m/s ο καθένας. Η δύναμη της παγκόσμιας έλξης μεταξύ των αστροναυτών θεωρείται αμελητέα.

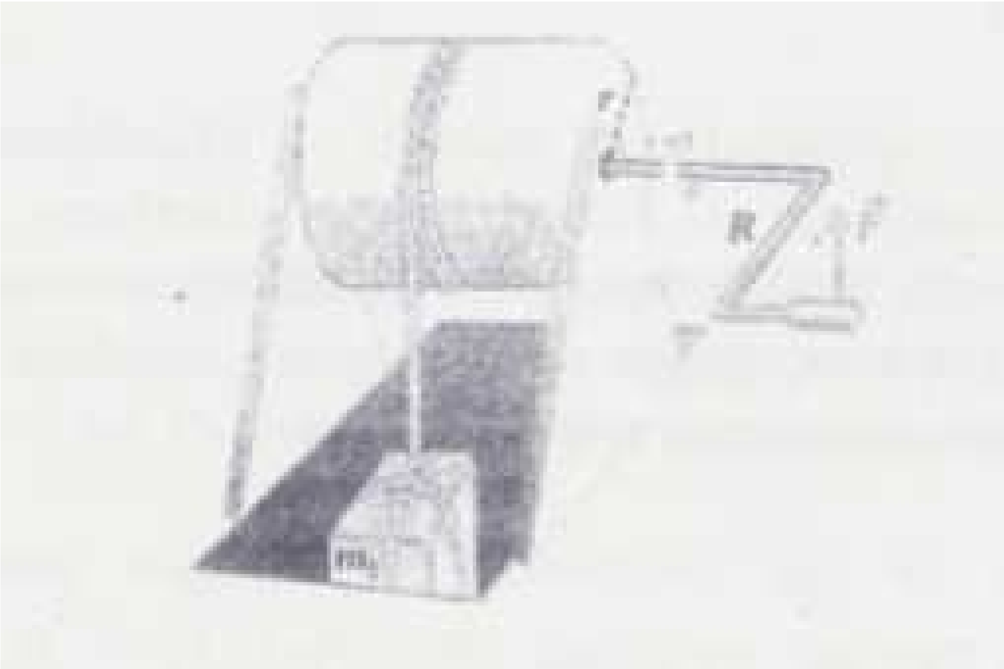
i) Να βρείτε το μέτρο της στροφορμής του συστήματος, θεωρώντας τους αστροναύτες σαν υλικά σημεία.
ii) Να βρείτε την κινητική ενέργεια του συστήματος.
iii) Να υπολογίσετε την τάση $\vec{T}$ του σχοινιού.
iv) Οι δύο αστροναύτες τραβώντας προς το μέρος τους και μαζεύοντας το σχοινί, ελαττώνουν την μεταξύ τους απόσταση. Αν το σχοινί κόβεται όταν η τάση σε αυτό ξεπεράσει την τιμή T_{max}=2304 N, ποια μπορεί να είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο αστροναυτών ώστε το σχοινί να μην κοπεί;
v) Ποιες είναι οι νέες ταχύτητές τους; Να διατυπώσετε τη θεμελιώδη αρχή της Φυσικής που χρησιμοποιήσατε στους υπολογισμούς σας.
vi) Πόσο έργο παράγεται από τους αστροναύτες όταν ελαττώνουν το μήκος του σχοινιού μέχρι να έρθουν στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση χωρίς τον κίνδυνο να κοπεί το σχοινί;

(Απ.: 9600 kg.m^2/s, 8000 J, (4000/3) N, 10 m, 3520 J)

109 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Για την διάταξη του ακόλουθου σχήματος (μαγγανοπήγαδο) δίνονται: R=0,2 m, r=0,1 m, m_1=10 kg και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής I=0,04 kg.m^2.

i) Να βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$ ώστε το σύστημα να ισορροπεί.
ii) Αν η δύναμη $\vec{F}$ έχει μέτρο F=100 N και το σημείο εφαρμογής της εκτελέσει 4 στροφές, να βρείτε την ταχύτητα που αποκτά το σώμα μάζας m_1.
iii) Ποια θα είναι η ισχύς της δύναμης F εκείνη την χρονική στιγμή;

Θεωρούμε ότι στο σύστημα μάζα έχουν μόνο ο κύλινδρος και το σώμα. Δίνεται g=10 m/s^2.



(Απ.: 50 N, $\sqrt{\frac{80.\pi}{7}}$ m/s , $200.\sqrt{\frac{80.\pi}{7}}$ W)

Η. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ- ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (ή ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ)

110. Ένα αυτοκίνητο έχει μάζα M=1400 kg και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=20 m/s. Κάθε τροχός έχει μάζα m=24 kg και ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}.m.R^2$. Να βρεθεί η κινητική του ενέργεια και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που είναι περιστροφική κινητική ενέργεια.
(Απ.: 289600 J, 3,3 %)

111. Η ροπή αδράνειας του μορίου του οξυγόνου, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στην απόσταση των δύο ατόμων είναι $1,95.10^{-46}$ kg.m^2. Η μάζα του ατόμου του οξυγόνου είναι $2,66.10^{-26}$ kg και το μόριο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 2.10^{10} rad/s. Να βρείτε:

α. Την απόσταση των δύο ατόμων.

β. Την κινητική ενέργεια του μορίου λόγω της περιστροφής του.

(Απ.: $1,2.10^{-10}$ m, $3,9.10^{-26}$ J)

112. Κύβος από πάγο αφήνεται από ύψος h να ολισθήσει χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο. Σφαίρα αφήνεται να κυλήσει, χωρίς ολίσθηση, κατά μήκους ενός άλλου κεκλιμένου επιπέδου από το ίδιο ύψος. Αν οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες, να συγκρίνετε, για την κίνησή τους μέχρι την βάση των κεκλιμένων επιπέδων, τα έργα των βαρών και τις τελικές ταχύτητες των σωμάτων.
(Απ.: $W_1=W_2$, $υ_1>υ_2$)

113. Μια ομογενής σφαίρα αφήνεται από ύψος h_1=7 m ενός κεκλιμένου επιπέδου να κυλήσει χωρίς ολίσθηση. Από ποιο ύψος h_2 ενός άλλου κεκλιμένου επιπέδου πρέπει να αφήσουμε έναν κύβο πάγου να ολισθήσει χωρίς τριβές, ώστε τα δύο σώματα να φτάσουν στις βάσεις των κεκλιμένων επιπέδων με ίσες ταχύτητες; Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm}=\frac{2}{5}.m.R^2$, όπου m η μάζα του.

(Απ.: 5 m)

114. Μια συμπαγής και ομογενής σφαίρα ακτίνας R=0,1 m και μάζας m=1 kg κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα μέτρου υ=20 m/s. Στην πορεία της συναντά κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ=30° και συνεχίζει την κίνησή της, χωρίς ολίσθηση, πάνω σε αυτό.

α. Ποια είναι η επιβράδυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας στο κεκλιμένο επίπεδο;

β. Πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο; Να γίνει η αντίστοιχη γραφικά παράσταση.

γ. Κατά πόσα rad στρέφεται μια ακτίνα της σφαίρας από τη στιγμή που η σφαίρα συναντά το κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία;

δ. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της σφαίρας την χρονική στιγμή που αρχίζει να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο;

Δίνονται για τη σφαίρα $I_{cm}=\frac{2}{5}.m.R^2$, όπου m η μάζα της και g=10 m/s^2.

(Απ.: $\frac{25}{7}\text{m/s}^2$, $200-\frac{250}{7}\text{t}$, 560rad, +100 J/s)

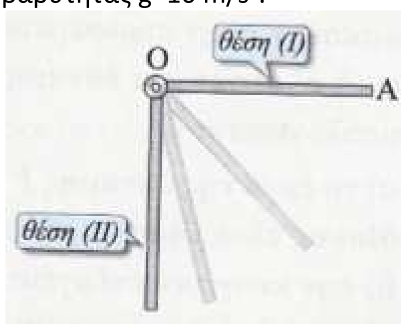
115. Η δοκός του ακόλουθου σχήματος έχει μήκος L=1 m και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο σ' αυτή, ο οποίος περνάει από το σημείο Ο. Αν αφήσουμε τη δοκό ελεύθερη να περιστραφεί ενώ ήταν σε οριζόντια θέση, να βρείτε:

α. Τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τη στιγμή που φτάνει στην κατακόρυφη θέση.

β. Τη γραμμική ταχύτητα του άκρου Α της δοκού στη θέση αυτή.

Η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς το κέντρο της Κ είναι $I_K=\frac{1}{12}.m.l^2$, ενώ δίνεται (ΟΑ)=20 cm.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.



(Απ.: 5,5 rad/s, 1,1 m/s)

116. Τρεις ίδιες σημειακές σφαίρες στερεώνονται στα δύο άκρα Α και Β και στο μέσο Κ ράβδου μήκους L και αμελητέου βάρους. Η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Αν η ράβδος ανατραπεί και πέσει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών τη στιγμή της επαφής τους με το επίπεδο. Τριβές δεν υπάρχουν.

(Απ.: 0, $\sqrt{\frac{3.g.l}{5}}$, $\sqrt{\frac{12.g.l}{5}}$)

117. Μια ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους L=0,3 m, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α, χωρίς τριβές. Πόση είναι η ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί η ράβδος από την κατακόρυφη θέση, ώστε να φτάσει σε οριζόντια θέση.

Δίνονται για την ράβδο $I_{(A)}=\frac{1}{3}.m.l^2$, όπου m η μάζα της και g=10 m/s^2.

(Απ.: 10 rad/s)

118. Μια πόρτα έχει πλάτος 1 m, μάζα 30 kg και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από την πλευρά στήριξής της, χωρίς τριβές. Η πόρτα είναι κλειστή χωρίς να είναι κλειδωμένη. Ένα βλήμα μάζας 20 g κινείται με οριζόντια ταχύτητα 500 m/s και σφηνώνεται στο κέντρο της. Να βρείτε:

α. Τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της πόρτας αμέσως μετά το σφήνωμα του βλήματος.

β. Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος πόρτα-βλήμα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα περιστροφής της I_π=10 kg.m^2.

(Απ.: 0,667 rad/s, 2498 J)

119. Οι δύο δίσκοι του σχήματος, με ροπές αδράνειας I_1=2 kg.m^2 και I_2=4 kg.m^2 ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής τους, στρέφονται με γωνιακές ταχύτητες μέτρου ω_1=20 rad/s και ω_2=40 rad/s αντίστοιχα όπως στο ακόλουθο σχήμα. Κάποια στιγμή οι δύο δίσκοι έρχονται σε επαφή και δημιουργούν έναν κοινό δίσκο. Να βρείτε:

α. Την κοινή γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφονται τελικά οι δίσκοι.

β. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα.

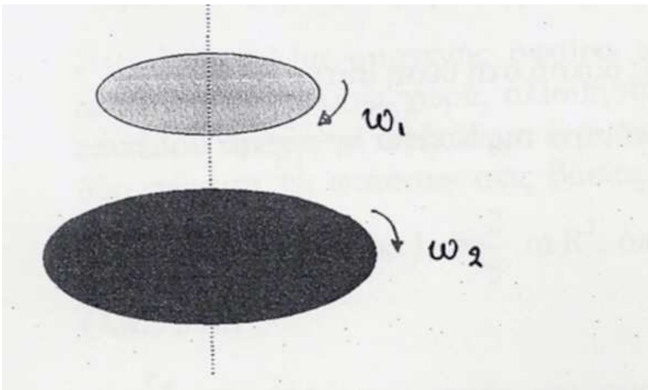
120. Ένας οριζόντιος δίσκος έχει ακτίνα 2 m, μάζα 140 kg και στρέφεται περί κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του με συχνότητα 0,1 Hz. Ξαφνικά πάνω στο δίσκο και σ' ένα σημείο κοντά στην περιφέρεια του πέφτει ένας σάκος με ασβέστη μάζας m=50 kg. Ο σάκος μπορεί να θεωρηθεί ως σημείο με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν. Να βρείτε:

α. Τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αμέσως μετά την πτώση του σάκου.

β. Την κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την πτώση. Γιατί αυτές δεν είναι ίσες;

Δίνεται για τη ροπή αδράνειας του δίσκου $I=\frac{1}{2}.m.R^2$.

(Απ.: $\frac{7\pi}{60}$ rad/s , 56 J, 20,4 J)

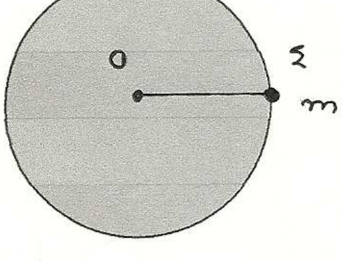


(Απ.: 33,3 rad/s, ……….. %)

121. Άνθρωπος κάθεται με τεντωμένα τα χέρια του σε στρεφόμενη καρέκλα. Σε κάθε χέρι κρατά ένα βαράκι σημειακής μάζας m=10 kg και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=5 rad/s. Ο άνθρωπος πλησιάζει τα βαράκια στην μισή απόσταση.

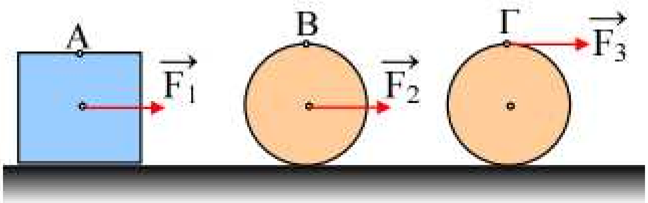
Αν η αρχική απόσταση που είχαν τα βαράκια από τον άξονα περιστροφής είναι r=1 m και η ροπή αδράνειας του συστήματος ανθρώπου-καρέκλας είναι I=20 kg.m^2, να βρείτε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος. Πως εξηγείται αυτή η μεταβολή;
(Απ.: 300 J)

122. Ο ομογενής δίσκος που φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα έχει ακτίνα R, μάζα m, ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο του I_o=(1/2).m.R^2 και το επίπεδό του είναι κατακόρυφο. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Στο άκρο Σ της οριζόντιας διαμέτρου ΟΣ είναι στερεωμένο μικρό σώμα μάζας m. Αν αφήσουμε το δίσκο ελεύθερο αρχίζει να περιστρέφεται, γύρω από τον οριζόντιο άξονά του. Να βρείτε τη γωνιακή του ταχύτητα τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του. Δίνεται το g και η ακτίνα του δίσκου R.



(Απ.: $2.\sqrt{\dfrac{g}{3.R}}$)

123 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν τρία σώματα της ίδιας μάζας Μ. Το πρώτο είναι ένας κύβος ενώ τα δύο άλλα δύο όμοιοι κύλινδροι της ίδιας ακτίνας R. Σε μια στιγμή t=0, ασκούνται πάνω τους τρεις ίσες σταθερές δυνάμεις $F_1=F_2=F_3=F$, όπως στο σχήμα, όπου οι δύο πρώτες δυνάμεις ασκούνται στα κέντρα των σωμάτων, ενώ η τρίτη ασκείται πάντα στην περιφέρεια του κυλίνδρου.



i) Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις του κέντρου μάζας των τριών σωμάτων.

ii) Να συγκρίνετε τις ταχύτητες των σημείων Α, Β και Γ μετά από χρονικό διάστημα t_1.

iii) Για τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίστε τους λόγους:

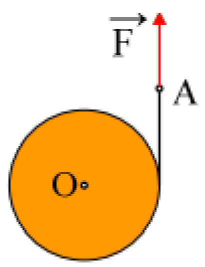
α) $\dfrac{W_{F1}}{W_{F2}}$ β) $\dfrac{W_{F2}}{W_{F3}}$

όπου W τα αντίστοιχα έργα των δυνάμεων.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I_{cm}=\dfrac{1}{2}.M.R^2$.

(Απ.: 1, 1/3)

124 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Τυλίγουμε γύρω από ένα κύλινδρο ένα αβαρές νήμα και ασκώντας στο άκρο του Α μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ τον αφήνουμε να κινηθεί. Η μάζα του κυλίνδρου είναι m=6 kg και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του που διέρχεται από το κέντρο της βάσης του Ο, δίνεται από τη σχέση $I_{cm}=\dfrac{1}{2}.m.R^2$ ενώ $g=10\ m/s^2$. Αν το σημείο Α (δες το σχήμα που ακολουθεί) κατέβει κατά $y_A=9$ m σε χρονικό διάστημα $t_1=3$ s να βρείτε:



α) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

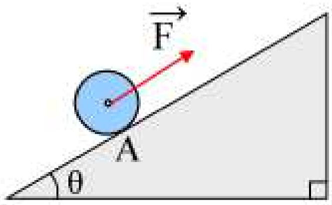
β) Πόσο έχει κατέβει ο κύλινδρος στο ίδιο χρονικό διάστημα;

γ) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου για $t_1=3$ s.

δ) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου την χρονική στιγμή t_1.

(Απ.: 16 N, 33 m, 2220 J, 1224 J/s)

125 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Ένας κύλινδρος μάζας m=10 kg και ακτίνας R=0,4 m ηρεμεί στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου, κλίσεως θ=30° με την επίδραση δύναμης F παράλληλης στο επίπεδο, η οποία ασκείται στον άξονα που συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων, όπως στο ακόλουθο σχήμα. Δίνονται οι συντελεστές τριβής μ_s=μ=0,3, η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2 ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{2}.m.R^2$.



A) Βρείτε το μέτρο της δύναμης F και εξηγείστε γιατί δεν ασκείται τριβή στον κύλινδρο.

B) Σε μια στιγμή t=0 αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F=80 N, μέχρι τη στιγμή t_1=5 s, οπότε η δύναμη F καταργείται.

B1) Βρείτε το μέτρο της ασκούμενης τριβής και σχεδιάστε την στο σχήμα για τις χρονικές στιγμές t_2=3 s και t_3=6 s.

B2) Σε πόση απόσταση από το σημείο Α ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία πριν αρχίζει να κινείται προς τα κάτω, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου;

B3) Πόσες περιστροφές έχει εν τω μεταξύ εκτελέσει ο κύλινδρος;

(Απ.: 10 N, 16,7 N, 40 m, (50/π))

126. Η ράβδος ΟΑ του ακόλουθου σχήματος, μήκους l=1 m και μάζας M=4 kg, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Ο. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Σημειακή σφαίρα μάζας m=0,5 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_o=100 m/s και προσκρούει στη ράβδο στο σημείο Γ με (ΟΓ)=d_1=2.l/3. Να βρείτε:

Α. Την γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει τη στροφική της κίνηση η ράβδος όταν η σφαίρα:

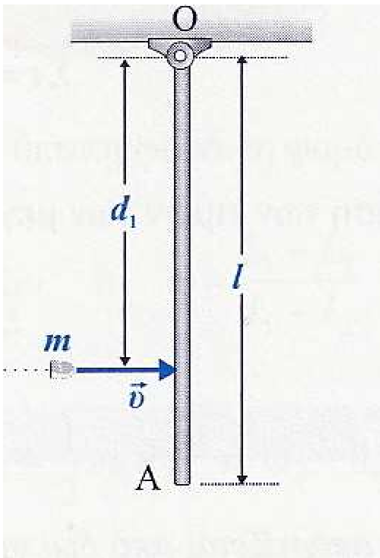
1. Εξέρχεται από το άλλο μέρος με ταχύτητα μέτρου υ_1=20 m/s.
2. Σφηνώνεται στη ράβδο.

Β. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την διάρκεια της κρούσης σε κάθε περίπτωση.

Γ. Φτάνει σε κάποια από τις δύο περιπτώσεις η ράβδος στην οριζόντια θέση. Αν ναι, ποια η γωνιακή της ταχύτητα;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_A = \frac{1}{3}M.l^2$.

Ο χρόνος παραμονής της σφαίρας μέσα στη ράβδο όταν τη διαπερνά είναι αμελητέος.



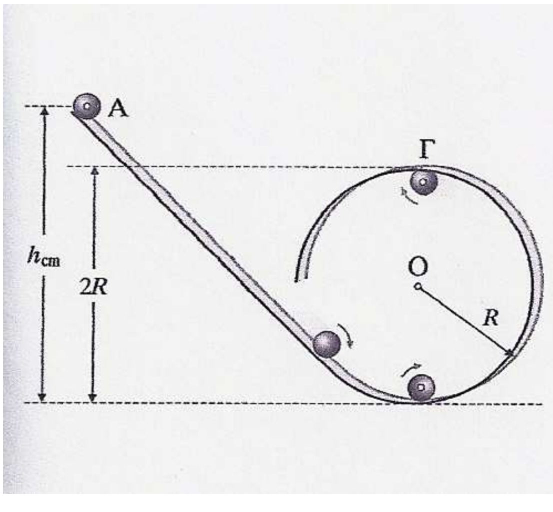
(Απ.: 20 rad/s, 150/7 rad/s, 85%, 86%, 19,2 rad/s, 20,7 rad/s)

127. Στο ακόλουθο σχήμα η ομογενής σφαίρα, ακτίνας r=0,4 m, αφήνεται στο σημείο Α του κεκλιμένου επιπέδου, που βρίσκεται σε ύψος h. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο αλλά και στο εσωτερικό της κυκλικής στεφάνης ακτίνας R=20 m.

α. Τι ταχύτητα πρέπει να έχει η σφαίρα στο ανώτερο Γ της στεφάνης, ώστε να κάνει ασφαλή ανακύκλωση;

β. Ποιο είναι το ελάχιστο ύψος h του κέντρου της σφαίρας από το έδαφος, ώστε να κάνει ασφαλή ανακύκλωση;

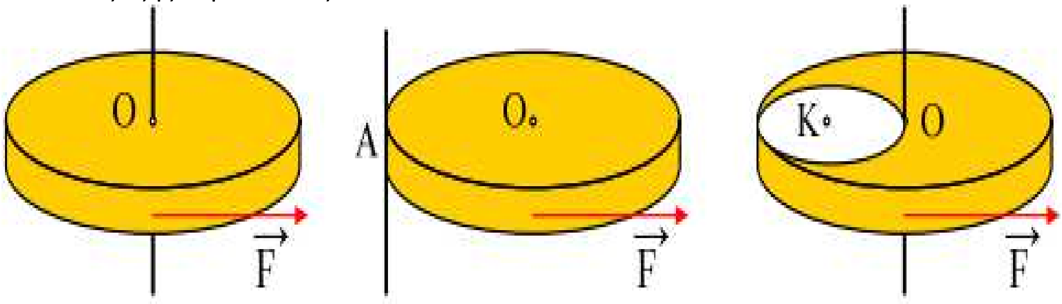
Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm}=\frac{2}{5}.m.r^2$ και $g=10\ m/s^2$.



(Απ.: 14 m/s, 53,32 m)

<u>Θ. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

128 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος ακτίνας R=0,4 m και μάζας M=4 kg μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, όταν πάνω του ασκείται εφαπτομενικά δύναμη σταθερού μέτρου F=16 N. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά στις εξής περιπτώσεις:



α) Ο άξονας είναι κατακόρυφος και διέρχεται από το κέντρο του Ο.

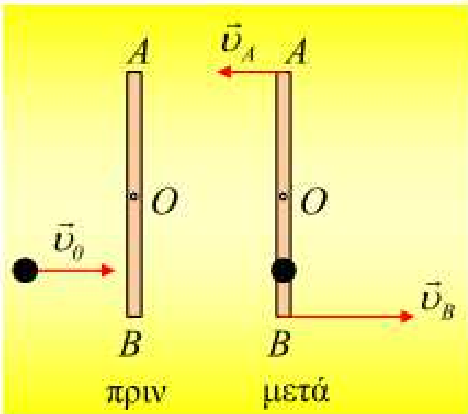
β) Ο άξονας είναι κατακόρυφος και διέρχεται από το άκρο μιας ακτίνας του Α.

γ) Ο άξονας είναι κατακόρυφος και διέρχεται από το κέντρο του, αλλά έχει αφαιρεθεί από τον δίσκο ένας μικρότερος δίσκος ακτίνας r=0,2 m, όπως στο σχήμα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I_{cm}=\frac{1}{2}.M.R^2$.

(Απ.:……)

129. Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους L=6 m ηρεμεί σε οριζόντια θέση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σώμα Σ μάζας επίσης m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα $υ_o$=20 m/s, σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και προσκολλάται σε αυτήν. Αμέσως μετά την κρούση τα άκρα της ράβδου έχουν ταχύτητες μέτρων $υ_A$=6 m/s και $υ_B$=18 m/s, όπως στο σχήμα.



i. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ.

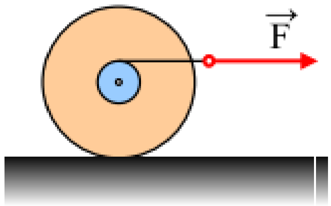
ii. Η θέση του κέντρου μάζας Κ γύρω από το οποίο στρέφεται το σύστημα μετά την κρούση.

iii. Σε πόση απόσταση z από το άκρο Β έχει προσκολληθεί το σώμα Β;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στον άξονά της $\mathbf{I}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}.\mathbf{m}.\mathbf{L}^2$.

(Απ.: 10 m/s, 1 m, 1 m)

130 (YLIKONET_3.5.1). Το ομοαξονικό σύστημα των δύο κυλίνδρων με ακτίνες R_1=0,1 m και R_2=0,5 m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τυλίγουμε γύρω από τον κύλινδρο ακτίνας R_1 ένα αβαρές νήμα, ασκώντας στο άκρο του Α οριζόντια δύναμη F=40 N. Το σύστημα αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Για μετακίνηση κατά x=10 m του άξονα των κυλίνδρων να βρεθούν:

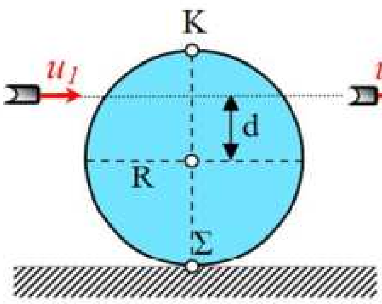


α. Το έργο της δύναμης F.

β. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο κυλίνδρων.

(Απ.: ………)

131 (YLIKONET). Ένας κύλινδρος μάζας M=4 kg και ακτίνας R=0,3 m ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,1. Ένα βλήμα μάζας m=0,1 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$=1000 m/s, σε διεύθυνση που απέχει απόσταση d από το κέντρο του κυλίνδρου και βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με αυτό. Το βλήμα διαπερνά τον κύλινδρο και εξέρχεται με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική, ενώ αμέσως μετά την κρούση, το σημείο επαφής Σ του κυλίνδρου με το δάπεδο αποκτά ταχύτητα μέτρου 9 m/s με φορά προς τα δεξιά και το αντιδιαμετρικό του ταχύτητα 18 m/s ίδιας κατεύθυνσης με αυτή του σημείου Σ.



Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου αμέσως μετά την κρούση.

β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου αμέσως μετά την κρούση.

γ. Το μέτρο της ταχύτητας $υ_2$ του βλήματος.

δ. Την απόσταση d.

ε. Τη χρονική στιγμή t_1 μετά την κρούση, όπου θεωρούμε ως t=0, όπου ο κύλινδρος ξεκινά να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

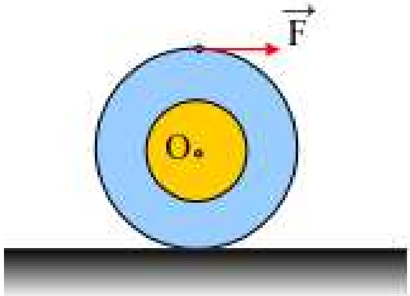
στ. Το έργο της τριβής μέχρι την χρονική στιγμή t_1.

ζ. Την απόσταση d της διεύθυνσης κίνησης του βλήματος από το κέντρο του κυλίνδρου στην οποία έπρεπε να χτυπήσει το βλήμα ώστε ο κύλινδρος αμέσως μετά την κρούση να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας $I_{cm} = \frac{1}{2}.M.R^2$ και η επιτάχυνσή της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 13,5 m/s, 15 rad/s, 460 m/s, 0,05 m, 3 s, -54 J, 0,15 m)

132 (YLIKONET). Ο κύλινδρος του σχήματος που ακολουθεί, αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά (στο σχήμα με διαφορετικά χρώματα). Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο.



Ασκούμε στο άκρο του νήματος σταθερή οριζόντια δύναμη F=20 N, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν το κέντρο O του κυλίνδρου μετατοπισθεί κατά x_1=4 m η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι $K_{μετ}$=90 J.

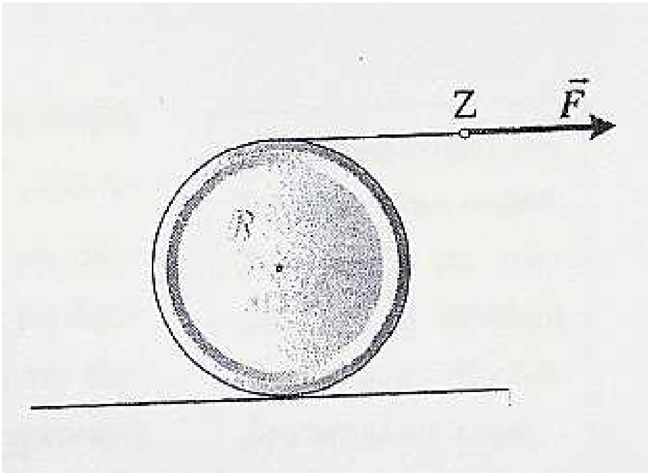
i) Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.

ii) Πόση είναι την παραπάνω χρονική στιγμή η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου;

iii) Αν η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από την εξίσωση I=λ.m.R^2, να υπολογιστεί ο συντελεστής λ.

(Απ.: 2,5 N, 70 J, 7/9)

133 (ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ). Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος μάζας M=2 kg και ακτίνας R=0,5 m, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές, μη εκτατό νήμα.



Από τη χρονική στιγμή t=0 και μετά ασκούμε στο άκρο Z του νήματος οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή t_1=4 s ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του κυλίνδρου ισούται με $\frac{dK_{ΣΤΡ}}{dt} = 16\frac{J}{s}$. Να υπολογίσετε:

α. την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου την χρονική στιγμή t_1,

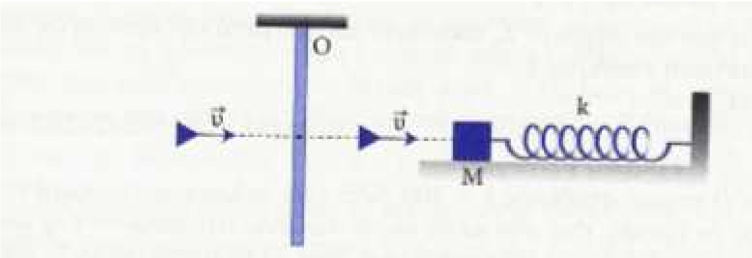
β. το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από την χρονική στιγμή t=0 έως την χρονική στιγμή t_1=4 s, καθώς και το μέτρο της,

γ. το ποσοστό του έργου της δύναμης $\vec{F}$ που έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης τη χρονική στιγμή t_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = (1/2).M.R^2$.

(Απ.: 96 J, 96 J, 66,7%)

134 (ΑΓΙΑΝΝΙΩΤΑΚΗ-ΑΡΧΩΝ). Η κατακόρυφη ράβδος του ακόλουθου σχήματος έχει μάζα M_1=2,5 kg και μήκος L=1,2 m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το πάνω άκρο της O και είναι κάθετος σε αυτή. Ακίνητο σώμα Σ μάζας M=9,9 kg βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι προσδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=1000 N/m, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Βλήμα μάζας m=0,1 kg, που κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ_o$=200 m/s, διαπερνά ακαριαία τα ράβδο στο μέσο της και εξέρχεται από αυτή με οριζόντια ταχύτητα $\vec{υ}$. Το βλήμα, μετά την έξοδό του από τη ράβδο, κινείται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας M. Η ράβδος μετά τη διέλευση του βλήματος εκτρέπεται από την αρχική κατακόρυφη θέση της και σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά, όταν γίνεται οριζόντια. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά τη διέλευση του βλήματος από αυτήν,

β. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{υ}$ του βλήματος μετά τη διέλευση του από τη ράβδο,

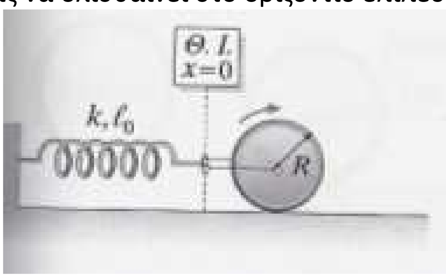
γ. το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα του βλήματος και του σώματος Σ,

δ. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος, τη χρονική στιγμή κατά την οποία η κινητική του ενέργεια γίνεται τριπλάσια από τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής του.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I = \frac{1}{12}.M_1.L^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=10 m/s^2.

(Απ.: 5 rad/s, 100 m/s, 0,1 m, 50 kg.m/s^2)

135 (Σαββάλας). Ο κύλινδρος του ακόλουθου σχήματος μάζας m και ακτίνας R, μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο.

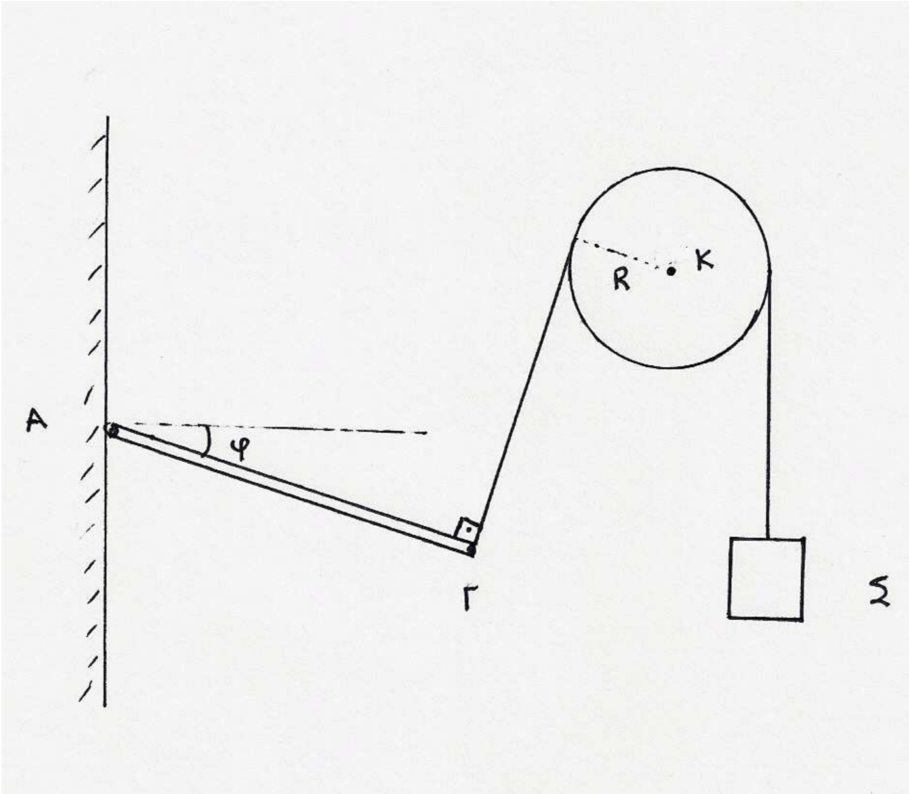


Απομακρύνουμε τον κύλινδρο από την θέση ισορροπίας στην διεύθυνση του ελατηρίου και στην συνέχεια τον αφήνουμε ελεύθερο. Αν στην θέση ισορροπίας το ελατήριο σταθεράς k έχει το φυσικό του μήκος να αποδείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδό της.

Δίνεται για τον κύλινδρο $I_{cm} = \frac{1}{2}.m.R^2$.

(Απ.: $2\pi.\sqrt{\frac{3.m}{2.k}}$)

136. Ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας m_1=10kg και μήκους L=3m, ισορροπεί όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία φ, με την βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος το οποίο είναι περασμένο από ομογενή τροχαλία ακτίνας R=0,5m και μάζας M=2kg. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο στην άκρη σώματος Σ το οποίο έχει μάζα m_2. Η ράβδος είναι αρθρωμένη από σημείο Α σε κατακόρυφο τοίχο.



Να υπολογίσετε κατά την ισορροπία της ράβδου:

A1. Την τάση του νήματος που ασκείται στο άκρο Γ της ράβδου.
A2. Την δύναμη που η άρθρωση στο Α ασκεί στην ράβδο.
A3. Την δύναμη του άξονα της τροχαλίας στο σημείο Κ.
A4. Τη μάζα m_2 του σώματος Σ.

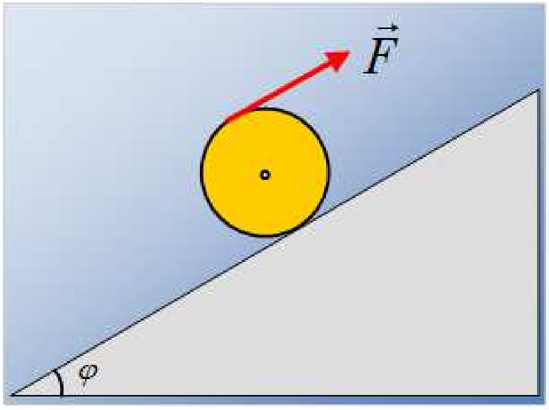
Κάποια στιγμή το νήμα που συγκρατεί τη ράβδο κόβεται. Να βρείτε:

B1. Την επιτάχυνση που το σώμα Σ αποκτά κατεβαίνοντας.
B2. Την ταχύτητα που αποκτά όταν θα έχει ξετυλιχτεί 4m νήματος.
B3. Την ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που χτυπά στον κατακόρυφο τοίχο.
B4. Τη δύναμη που η άρθρωση ασκεί στη ράβδο, αμέσως μόλις κοπεί το νήμα και τη στιγμή που η ράβδος χτυπά στον κατακόρυφο τοίχο.

Δίνονται ημφ=0,6, συνφ=0,8, g=10m/s^2, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}.M.R^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στην διεύθυνσή της $I = \frac{1}{12}.m_1.L^2$, ενώ προτείνεται η χρήση μικροϋπολογιστή.

(Απ.: 40 N, 72,1 N, 95,1 N, 4 kg, 8 m/s^2, 8 m/s, 2 rad/s, 64 N, 160 N)

137 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ). Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται κεκλιμένο επίπεδο κλίσης φ: ημφ=0,6 και συνφ=0,8, ένας κύλινδρος μάζας m=1 kg και ακτίνας R=0,1m και ροπής αδράνειας ως προς τον άξονά του $I = (1/2).m.R^2$.



Γύρω από την περιφέρειά του και στο μέσο του ύψους του έχουμε τυλίξει πολλές φορές, λεπτό νήμα μη εκτατό, σε αύλακα που υπάρχει. Ο κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα , και στην αρχή δεν εφάπτεται του κεκλιμένου επιπέδου. Στο άκρο του νήματος, τη χρονική στιγμή t_o=0 ασκούμε σταθερή δύναμη F=mg μέχρι να αποκτήσει συχνότητα (f_0=60/π) Hz, και αμέσως τον αφήνουμε στο κεκλιμένο επίπεδο ελεύθερο χωρίς να ασκούμε δύναμη στο νήμα. Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται για λίγο στη θέση που τον αφήσαμε, και όταν σταματήσει να περιστρέφεται, αρχίζει να κυλά προς τα κάτω, μετατοπίζοντας το κέντρο μάζας του κατά x=0,5m, κυλιόμενος χωρίς ολίσθηση. Δίνεται g=10m/s^2 και ότι ο άξονάς του μετακινείται παράλληλα στην αρχική διεύθυνση.

1. Ποια χρονική στιγμή t_1 αφήσαμε τον κύλινδρο στο κεκλιμένο επίπεδο.

2. Εξηγείστε γιατί ο κύλινδρος παρέμεινε για λίγο στο κεκλιμένο επίπεδο και υπολογίστε το χρονικό διάστημα αυτό.

3. Βρείτε τη χρονική στιγμή t_3 που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου καθώς και την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

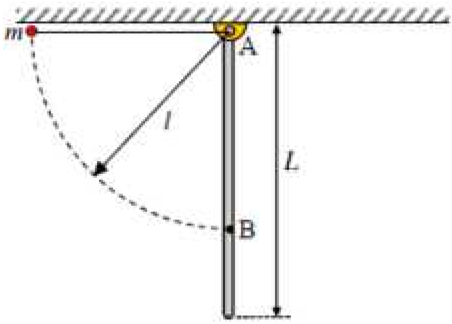
4. Πόση θερμότητα παράχθηκε; Να υπολογίσετε το λόγο των δεξιόστροφων στροφών που έκανε ο κύλινδρος προς τον αριθμό των αριστερόστροφων.

Επαναλαμβάνουμε όπως και πριν με κλίση 30^o του κεκλιμένου επιπέδου. Τη στιγμή που ακουμπά (t=0) στο κεκλιμένο επίπεδο έχει την παραπάνω συχνότητα f_0=60/π Hz.

5. Πόσο διάστημα θα διανύσει ανεβαίνοντας μέχρι να σταματήσει στιγμιαία; Δίνεται $\frac{15.\sqrt{3}}{6} = 6{,}5$.

(Απ.: 36 rad, 1 s, 2,1 s, 19,2, 0,74 m)

138. Το πάνω άκρο Α της λεπτής ομογενούς ράβδου του παρακάτω σχήματος συνδέεται με άρθρωση, και η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο κίνησης διερχόμενο από τη θέση της άρθρωσης. Η ράβδος έχει μάζα Μ=3 kg και μήκος L=1 m. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Σημειακό σφαιρίδιο μάζας m=1 kg, είναι αναρτημένο με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος στο σημείο άρθρωσης της ράβδου (σημείο Α) και δύναται να κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο (όπως και η ράβδος). Το μήκος του νήματος είναι l=0,8 m. Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας Μ και μήκους L ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = (1/12).M.L^2$ καθώς και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

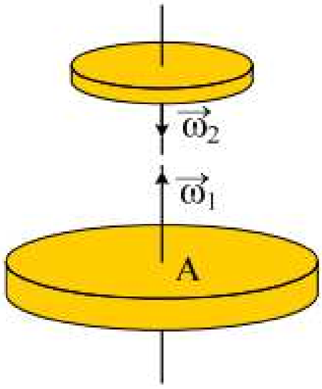


Α. Ανυψώνουμε το σφαιρίδιο έτσι ώστε το νήμα να έρθει σε οριζόντια θέση και διατηρώντας το τεντωμένο αφήνουμε το σφαιρίδιο ελεύθερο, οπότε αυτό συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο στο σημείο Β αυτής, όταν το νήμα γίνεται κατακόρυφο. Οι τριβές με τον άξονα περιστροφής θεωρούνται αμελητέες.

1. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποίαν ξεκινά να περιστρέφεται η ράβδος περί την άρθρωση Α.
2. Να υπολογίσετε την ανύψωση του κέντρου μάζας της ράβδου μετά την κρούση.
3. Τι ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μετατρέπεται κατά την κρούση σε θερμότητα.

Β. Να απαντήσετε εκ νέου στα παραπάνω ερωτήματα, αν η κρούση είναι ανελαστική αλλά όχι πλαστική και το σφαιρίδιο μετά την κρούση αποκτήσει ταχύτητα μέτρου 2 m/s, αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε αρχικά.
Μπορείτε στους υπολογισμούς να χρησιμοποιήσετε μικροϋπολογιστή.
(Απ.: ………)

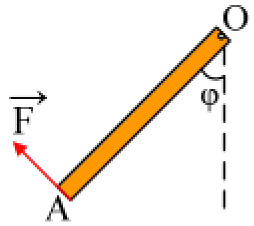
139 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Οι δίσκοι του σχήματος έχουν μάζες m_1=5 kg και m_2=2 kg και ακτίνες R_1=1 m και R_2=0,5 m αντίστοιχα. Οι δίσκοι περιστρέφονται γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από τα κέντρα τους, χωρίς τριβές. Ο κάτω δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1=10 rad/s με φορά προς τα πάνω και ο πάνω δίσκος ω_2=56 rad/s με φορά προς τα κάτω. Σε μια στιγμή ο πάνω δίσκος αποσπάται και πέφτει στον κάτω δίσκο, οπότε σε χρονικό διάστημα Δt=0,2 s αποκτούν την ίδια γωνιακή ταχύτητα και στρέφονται σαν ένα σώμα με γωνιακή ταχύτητα ω. Να υπολογίσετε:



α) Την αρχική στροφορμή κάθε δίσκου και την κοινή γωνιακή ταχύτητα ω.
β) Την μεταβολή της στροφορμής κάθε δίσκου.
γ) Το μέτρο της μέσης ροπής που δέχτηκε κάθε δίσκος.
δ) Το έργο της ροπής της τριβής που δέχτηκε ο μικρός δίσκος από τον μεγάλο, από τη στιγμή που ήρθαν σε επαφή, μέχρι τη στιγμή που απέκτησαν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς τον άξονά του $I_{cm} = (1/2).m.R^2$.
(Απ.: ………)

140 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Η ομογενής ράβδος του σχήματος μήκους L=1 m και μάζας 40 kg ισορροπεί με την βοήθεια δύναμης F που είναι κάθετη στο άκρο της A, όπως στο σχήμα, όπου φ=60°.



i) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο άκρο O.

ii) Αν το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ γίνει F= 76π N και είναι συνεχώς κάθετη στο άκρο A να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν φθάσει στην οριζόντια θέση για πρώτη φορά.

iii) Για την οριζόντια θέση να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας στη ράβδο μέσω της δύναμης F.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου.

δ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το μέσον της $I_{cm} = \frac{1}{12} m.L^2$ και g=10m/s^2.

(Απ.: 173,2 N, 264,5 N, 2 rad/s, 477,3 W, 39 N.m, 3 rad/s, 1 m/s)