

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

### ΚΥΜΑΤΑ - DOPPLER

#### A. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

1. Ένα κύμα περιγράφεται μαθηματικά από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x,t)=0,1\cdot\text{συν}2\pi(20t-0,25x) \quad (\text{S.I.})$$

Ποιες είναι οι πληροφορίες που έχετε για το κύμα αυτό;

**(Απ.: 0,1m πλάτος, 0,05s περίοδος, 4m μήκος κύματος, 80m/s ταχύτητα διάδοσης)**

2. Ένα κύμα με συχνότητα  $f=100$  Hz διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής με ταχύτητα  $u=5000$  m/s. Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων μιας χορδής τα οποία έχουν πάντα την ίδια μετατόπιση και την ίδια ταχύτητα.

**(Απ.: 50 m)**

3. Ένας μαθητής κάθεται στο λιμάνι και παρατηρεί μια βάρκα η οποία λικνίζεται στο ρυθμό των κυμάτων της θάλασσας. Διαπιστώνει ότι ο χρόνος που απαιτείται ώστε να πάει η βάρκα από το ανώτατο στο κατώτατο σημείο της ταλάντωσής της, μια απόσταση περίπου 0,9 m, είναι  $\Delta t=3$  s. Αν οι διαδοχικές κορυφές των κυμάτων απέχουν 9 m, να βρείτε:

- α. Πόσο γρήγορα ταξιδεύουν τα κύματα της θάλασσας.  
β. Το πλάτος των θαλασσιών κυμάτων.

**(Απ.: 1,5 m/s, 0,45 m)**

4. Ένα πλοίο βρίσκεται κοντά στην ακτή, ενώ επικρατεί ομίχλη. Για να προσδιορίσει ο καπετάνιος την απόσταση από την ακτή, εκπέμπει ηχητικό κύμα, οπότε ακούει δύο ήχους εξ' ανακλάσεως στην ακτή με διαφορά χρόνου 5 sec. Αν ο ήχος διαδίδεται στον αέρα και στο νερό με ταχύτητες 340 m/s και 1425 m/s αντίστοιχα, πόση νομίζετε ότι η απόσταση του πλοίου από την ακτή.

**(Απ.: 1116 m)**

5. Ένα μικρό κομμάτι φελλού μάζας  $m=5$  g ταλαντώνεται σε μια λεκάνη με νερό λόγω των κυμάτων, που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού με ταχύτητα 0,2 m/s. Τα κύματα έχουν πλάτος 5 mm και μήκος κύματος 15 mm. Να βρείτε τη μέγιστη κινητική ενέργεια του φελλού.

**(Απ.:  $0,44\cdot 10^{-3}$  J)**

6. Εγκάρσιο οριζόντιο κύμα διαδίδεται κατά την θετική φορά του άξονα  $x$  με ταχύτητα  $u=3$  m/s. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  η πηγή του κύματος έχει απομάκρυνση  $y=0$  και αρχίζει να κινείται προς τα πάνω (θετικά) με συχνότητα  $f=0,25$  Hz. Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι  $A=10$  cm να βρείτε:

- α. Το μήκος κύματος  $\lambda$ .  
β. Τη χρονική στιγμή  $t$  που αρχίζει να ταλαντώνεται ένα σωματίο το οποίο απέχει από την πηγή  $x=120$  m.  
γ. Ποια είναι η απομάκρυνση και ποια η ταχύτητα του σωματίου τη χρονική στιγμή  $t=50$  s;

**(Απ.: 12 m, 40 s, 0, -0,157 m/s)**

7. Σ' έναν κυματοθραύστη σπάνε κύματα με ρυθμό 12 ανά λεπτό. Αν το μήκος κύματος είναι  $\lambda=50$  m, ποια νομίζετε ότι είναι η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύουν; Να γράψετε την κυματική τους εξίσωση αν κάθε μόριο του νερού ταλαντώνεται μεταξύ δύο θέσεων που απέχουν κατακόρυφα 0,4 m, να γράψετε την κυματική εξίσωση που περιγράφει το κύμα.

(Απ.:  $10 \text{ m/s}$ ,  $y = 0,2 \cdot \eta, 2 \cdot \eta \left( \frac{t}{5} - \frac{x}{50} \right)$  (S.I.))

8. Ένα ελαστικό κύμα έχει συχνότητα  $f=5$  Hz, πλάτος  $A=0,01$  m και ταχύτητα διάδοσης  $v=20$  m/s. Την χρονική στιγμή  $t=0$  η απομάκρυνση της πηγής του κύματος είναι  $y=0,01$  m. Να βρείτε:

α. Την κυκλική συχνότητα  $\omega$ , την περίοδο  $T$  και το μήκος κύματος  $\lambda$ .

β. Την κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα.

(Απ.:  $10\pi \text{ rad/s}$ ,  $0,2 \text{ s}$  και  $4 \text{ m}$ ,  $y=0,01 \cdot \eta \mu 2\pi(5 \cdot t - 0,25 \cdot x + 1/4)$  (S.I.))

9. Ένα εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός οριζόντιου νήματος και από αριστερά προς τα δεξιά με ταχύτητα  $v=100$  m/s. Το κύμα έχει πλάτος  $A=0,1$  m, μήκος κύματος  $\lambda=1,6$  m και η πηγή του την χρονική στιγμή  $t=0$  έχει απομάκρυνση  $y=0$  και κινείται προς τα επάνω (θετικά).

α. Πόση είναι η συχνότητα του κύματος;

β. Ποια είναι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα;

γ. Πόση είναι η απομάκρυνση από την Θ.Ι. ενός σωματίου, που βρίσκεται σε απόσταση  $x=0,8$  m από την πηγή τη χρονική στιγμή  $t=0,032$  s;

(Απ.:  $62,5 \text{ Hz}$ ,  $y=0,1 \cdot \eta \mu 2\pi(62,5 \cdot t - \frac{x}{1,6})$  (S.I.),  $0 \text{ m}$ )

10. Μια πηγή παραγωγής ημιτονοειδών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή Ο ομογενούς χορδής μεγάλου μήκους. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο είναι  $y=4 \cdot 10^{-2} \eta \mu 10\pi t$  (S.I.) και το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά την θετική κατεύθυνση. Το μήκος κύματος είναι  $\lambda=0,8$  m.

α. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Πόση είναι η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $t=1,25$  s ενός υλικού σημείου της χορδής το οποίο απέχει από την πηγή Ο απόσταση  $x=4$  m;

δ. Να κατασκευαστεί το στιγμιότυπο του κύματος για τις χρονικές στιγμές  $t_1=0,1$  s και  $t_2=0,25$  sec.

(Απ.:  $4 \text{ m/s}$ ,  $4 \cdot 10^{-2} \cdot \eta \mu 2\pi(5 \cdot t - 1,25 \cdot x)$  (S.I.),  $4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ )

11. Ένα εγκάρσιο γραμμικό αρμονικό κύμα με συχνότητα  $f=10$  Hz και πλάτος  $A=1$  cm διαδίδεται κατά μήκος ευθείας  $x'x$  με ταχύτητα  $v=1$  m/s, από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αν το κύμα κάποια χρονική στιγμή που την θεωρούμε ίση με  $t=0$  βρίσκεται στη θέση Ο, να βρείτε την απομάκρυνση του σημείου Γ, που βρίσκεται αριστερά του Ο σε απόσταση  $x_1=25$  cm, τη χρονική στιγμή  $t_1=1,225$  s.

(Απ.:  $-1 \text{ cm}$ )

12. Μια πηγή κυμάτων Ο αρχίζει να εκτελεί, τη χρονική στιγμή  $t=0$ , απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση  $y=0,08 \cdot \eta \mu \pi t$  (S.I.). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x'x$  με ταχύτητα  $v=2$  m/s.

α. Να βρείτε την περίοδο, τη συχνότητα και το μήκος κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν την ταχύτητα ταλάντωσης και την επιτάχυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σημείο M που βρίσκεται στη θέση  $x=2$  m.

δ. Να παραστήσετε γραφικά τη φάση  $\phi$  της ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του ημιάξονα Ox σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη  $x$  τη χρονική στιγμή  $t=5$ s.

(Απ.:  $4$  m,  $0,08\eta\mu 2\pi(0,5.t-0,25.x)$ ,  $0,08\pi\sigma\upsilon\nu\pi(t-1)$  και  $-0,08\pi^2\eta\mu\pi(t-1)$  (S.I.),  $5\pi-0,5.\pi.x$ )

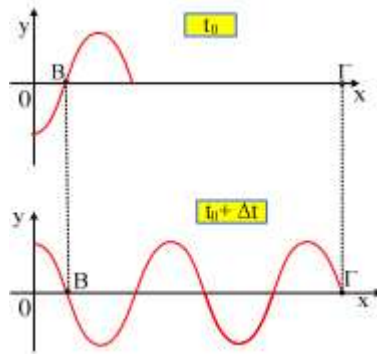
13. Σε ένα σημείο O ενός ελαστικού μέσου δημιουργείται μια αρμονική διαταραχή της μορφής

$$y=\eta\mu 10\pi t \quad (y \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

Αν η ταχύτητα διάδοσης του παραγόμενου γραμμικού κύματος είναι  $u=10$  m/s, να βρείτε τη φάση  $\phi$  και την απομάκρυνση  $y$  από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $t=(7/30)$  s ενός σημείου M της ευθείας διάδοσης του κύματος που απέχει από την πηγή του κύματος απόσταση  $L=2$  m.

(Απ.:  $(\pi/3)$  rad,  $+\sqrt{3}/2$  cm)

14 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ). Αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο σχήμα που ακολουθεί βλέπετε τα στιγμιότυπά του δύο χρονικές στιγμές  $t_0$  και  $t_0+\Delta t$ .



α. Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων B και  $\Gamma$  την χρονική στιγμή  $t_0$ ;

β. Ποια η αντίστοιχη διαφορά φάσης τη χρονική στιγμή  $t_0+\Delta t$ ;

γ. Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αυτών σημείων τη χρονική στιγμή  $t_0+2.\Delta t$ ;

δ. Να βρεθεί η μεταβολή της φάσης του σημείου B μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t_0$  και  $t_0+\Delta t$ ;

(Απ.:  $\pi$  rad,  $4\pi$  rad,  $4\pi$  rad,  $3\pi$  rad)

15. Σε ένα σημείο O ενός ελαστικού μέσου υπάρχει μια πηγή κυμάτων, η οποία την χρονική στιγμή  $t=0$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση

$$y=0,5.\eta\mu\omega t \quad (y \text{ σε m, } t \text{ σε s})$$

Στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και προς τα δεξιά της πηγής υπάρχουν δύο σημεία A και  $\Gamma$ , τα οποία απέχουν από την πηγή αποστάσεις  $(OA)=0,4$  m και  $(O\Gamma)=0,5$  m αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή  $t=0,5$  s που το κύμα φτάνει στο A η φάση της πηγής είναι  $\phi=8\pi$  rad.

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του σημείου  $\Gamma$  σε συνάρτηση με τον χρόνο και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

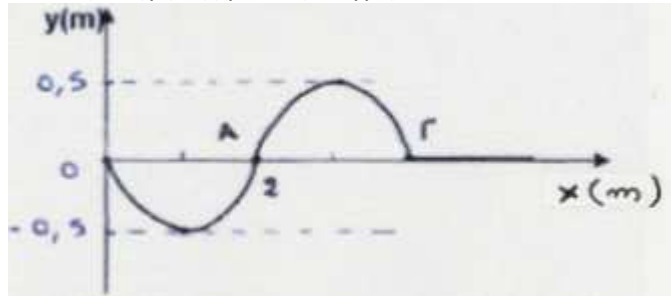
γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή  $t=0,5$  s.

(Απ.:  $y=0,5.\eta\mu 2\pi(8.t-10.x)$ ,  $u=8\pi.\sigma\upsilon\nu 2\pi(8.t-5)$ ,  $y = 0,5.\eta\mu 2\pi(4 - 10x)$  (S.I.))

16. Το παρακάτω σχήμα δείχνει το στιγμιότυπο ενός γραμμικού αρμονικού κύματος, συχνότητας  $f=50$  Hz, τη χρονική στιγμή  $t_1$ . Αν στο σημείο  $x=0$  είναι η πηγή του κύματος και τη στιγμή  $t=0$  το κύμα βρίσκεται στη θέση  $x=0$  να βρείτε:

- Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τη χρονική στιγμή  $t_1$ .
- Την εξίσωση του κύματος.
- Την απομάκρυνση  $y$  και την ταχύτητα  $v$  του σημείου Γ, το οποίο απέχει από το σημείο Α απόσταση  $(ΑΓ)=2$  m, τη χρονική στιγμή  $(t_1+0,01)$  s.

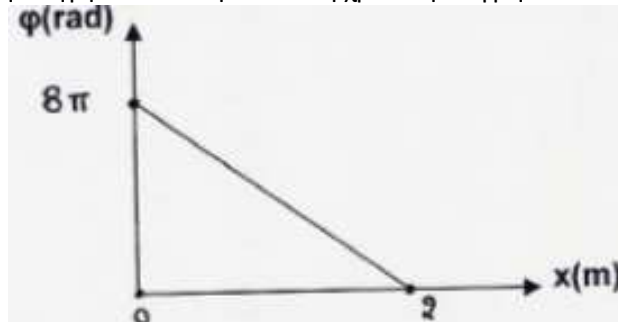
Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση  $x$  από την πηγή τη χρονική στιγμή  $t_1$ .



(Απ.:  $200$  m/s,  $0,02$  sec,  $0,5 \cdot \eta\mu 2\pi(50 \cdot t - 0,25 \cdot x)$  (S.I.),  $0$  και  $-50\pi$  m/s)

17. Για ένα γραμμικό αρμονικό κύμα που τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  ξεκινά από την πηγή του, η φάση τη χρονική στιγμή  $t=2$  s μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την απόσταση  $x$  από την πηγή του κύματος όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Αν το πλάτος ταλάντωσης των διαφόρων υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι  $A=0,1$  m, να βρείτε:

- Τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- Την εξίσωση του κύματος.
- Το στιγμιότυπο του κύματος για τη χρονική στιγμή  $t=2$  s.
- Την ταχύτητα ταλάντωσης και την επιτάχυνση των σημείων της ευθείας διάδοσης που απέχουν από την πηγή απόσταση  $x=1$  m τη χρονική στιγμή  $t=5$  s.



(Απ.:  $2$  Hz- $1$  m/s,  $0,1 \cdot \eta\mu 4\pi(t-x)$ ,  $-0,1 \cdot \eta\mu 4\pi x$  (S.I.),  $0,4\pi$  m/s και  $0$ )

18 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Σε ένα σημείο Ο ενός ελαστικού μέσου υπάρχει μια πηγή κυμάτων, η οποία την χρονική στιγμή  $t=0$  αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση  $y=0,5 \cdot \eta\mu 4\pi t$  ( $y$  σε m,  $t$  σε s)

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $4$  m/s. Να βρείτε:

- Την εξίσωση διάδοσης του κύματος.
- Τις εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης των σημείων του ελαστικού μέσου.
- Την απομάκρυνση και την ταχύτητα των σημείων Α και Β του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στις θέσεις  $x_A=3$  m και  $x_B=6$  m, την χρονική στιγμή  $t_1=1$  s.

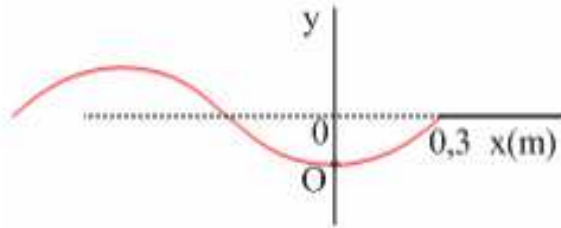
δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή  $t_1=1$  s καθώς και το διάγραμμα ταχύτητας-θέσης των υλικών σημείων του μέσου την ίδια χρονική στιγμή.

ε. Να σχεδιάσετε την απομάκρυνση σε συνάρτηση με τον χρόνο για τα σημεία Α και Β.

στ. Να σχεδιάσετε την μεταβολή της φάσης του κύματος με τον χρόνο για το σημείο Α και επίσης να σχεδιάσετε την μεταβολή της φάσης του κύματος με την θέση την χρονική στιγμή  $t_1$ .

(Απ.:  $y=0,5\eta\mu 2\pi(2t-0,5x)$ ,  $v=2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(2t-0,5x)$ ,  $\alpha=-8\pi^2\eta\mu 2\pi(2t-0,5x)$  (S.I.))

**19 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα προς την θετική κατεύθυνση. Στο διάγραμμα δίνεται ένα στιγμιότυπο του κύματος που ελήφθη για  $t=0$ .



Τη στιγμή αυτή το σημείο Ο, στη θέση  $x=0$  έχει μηδενική ταχύτητα και παρατηρούμε ότι θα ξαναέχει ταχύτητα μηδέν αφού μετακινηθεί 4 cm σε χρόνο 0,4 s.

α. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

β. Να γίνει το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=1,2$  s.

(Απ.:  $y = 0,02\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,8} - \frac{x}{1,2} + \frac{3}{4})$  (S.I.),  $y = 0,02\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi x}{3})$  (S.I.))

**20.** Ένα γραμμικό αρμονικό κύμα έχει συχνότητα  $f=1$  kHz και ταχύτητα διάδοσης  $u=900$  m/s.

α. Να βρείτε την απόσταση  $\Delta x$  δύο σημείων του μέσου, που βρίσκονται στην ευθεία διάδοσης του κύματος, αν η διαφορά φάσης τους την ίδια χρονική στιγμή είναι  $\Delta\phi=2\pi/3$  rad.

β. Ποια είναι η μεταβολή της φάσης ενός σημείου του μέσου διάδοσης, που βρίσκεται στην ευθεία διάδοσης, σε χρονικό διάστημα ίσο με  $\Delta t=10^{-3}$  s.

(Απ.: **0,3 m, 2π rad**)

**21.** Η πηγή ενός αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή  $t=0$  αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση  $y=0,1\eta\mu 10\pi t$  (S.I.). Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $u=1$  m/s.

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

β. Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=0,15$  s,  $t_2=0,2$  s και  $t_3=0,3$  s.

(Απ.:  $y=10\eta\mu 2\pi(5\cdot t-5\cdot x)$  (S.I.))

**22.** Σε κάποιο ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα γραμμικό αρμονικό κύμα το οποίο έχει

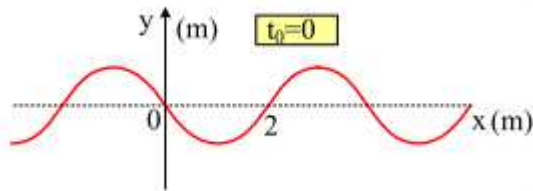
εξίσωση  $y=A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

α. Ποια χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται ένα σημείο Μ του μέσου που βρίσκεται στην ευθεία διάδοσης του κύματος και απέχει από την πηγή Ο του κύματος απόσταση  $x_M=5\lambda/4$ .

β. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με τον χρόνο την απομάκρυνση του σημείου Μ από την θέση ισορροπίας του.

(Απ.: **5T/4**)

**23 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου από τα αριστερά προς τα δεξιά και τη χρονική στιγμή  $t_0=0$ , πήραμε ένα στιγμιότυπο σε μια περιοχή του μέσου (το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από τη θέση  $x=6$  m).



Το σημείο Β στη θέση  $x_1=2$  m τη στιγμή αυτή έχει ταχύτητα μέτρου 1,57 m/s και φτάνει για πρώτη φορά στη μέγιστη θετική απομάκρυνση τη χρονική στιγμή  $t_1=1,5$  s.

- Ποια η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;
- Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2=12,5$  s.

Δίνεται  $\pi=3,14$ .

(Απ.: 2 m/s,  $y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right)$  (S.I.),  $y = 0,5 \cdot \sigma\upsilon\upsilon \frac{\pi x}{2}$  (S.I.))

**24.** Ένα γραμμικό αρμονικό κύμα διαδίδεται με ταχύτητα  $u=1$  m/s, έχει πλάτος  $A=2$  cm και περίοδο  $T=2$  s. Αν γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή  $t=0$  η απομάκρυνση του σημείου της αρχής των κυμάτων είναι  $y_1=+1$  cm και η ταχύτητά του θετική, να βρείτε την απομάκρυνση ενός σημείου που βρίσκεται στην ευθεία διάδοσης του κύματος και απέχει από την πηγή των κυμάτων απόσταση  $x=5$  m τη χρονική στιγμή  $t=10$  s.

(Απ.: -1 cm)

**25.** Η εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος είναι:

$$y=10 \cdot \eta\mu 2\pi(10t-5x) \quad (y \text{ σε cm, } x \text{ σε m, } t \text{ σε s})$$

Ένα σημείο Μ της ευθείας διάδοσης του κύματος βρίσκεται σε απόσταση  $x=10$  m από την πηγή του κύματος. Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές η απομάκρυνση του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του θα είναι  $y_1=+5\sqrt{3}$  cm.

(Απ.: 0,1.(κ+301/6) και 0,1.(κ+152/3) με  $t \geq 5$  s)

**26.** Σ' ένα ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα γραμμικό αρμονικό κύμα, το οποίο έχει ταχύτητα  $u=1$  m/s, συχνότητα  $f=10$  Hz και πλάτος  $A=1$  cm. Να βρείτε την εξίσωση του κύματος, αν τη χρονική στιγμή  $t=0$  το υλικό σημείο που αντιστοιχεί στην πηγή των κυμάτων έχει απομάκρυνση  $y=+1$  cm από την θέση ισορροπίας του.

(Απ.:  $y=10^{-2} \cdot \eta\mu 2\pi(10 \cdot t-10 \cdot x+1/4)$  (S.I.))

**27.** Αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος του άξονα  $x'$  έχει εξίσωση:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu \left( 20\pi t - 6\pi x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

α. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο ( $x=0$ ) και να βρείτε την απομάκρυνση  $y$  και την ταχύτητα  $v$  της αρχής Ο τη χρονική στιγμή  $t=0$ .

β. Που βρίσκεται το κύμα τη χρονική στιγμή  $t=0$  και που τη χρονική στιγμή  $t_1=0,225$  s;

γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_1=0,225$  s.

(Απ.:  $y=0,1 \cdot \eta\mu(20\pi t+\pi/2)$ , +A, (1/12) m, (5/6) m)

28. Δίνεται το αρμονικό κύμα με εξίσωση:

$$y = 0,08 \cdot \eta\mu(30t - 0,24x + \pi) \quad (\text{S.I.})$$

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κύματος και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου.

β. Που βρίσκεται το κύμα τη χρονική στιγμή  $t=0$ ;

γ. Να γίνει το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t=0$ .

δ. Να βρείτε την ταχύτητα της ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή  $t=0$ , του υλικού σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση  $x = +\frac{25\pi}{12} \text{ m}$ .

ε. Να βρείτε την ταχύτητα της ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή  $t=0,1\pi \text{ sec}$  του υλικού σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση  $x = +\frac{25\pi}{12} \text{ m}$ .

(Απ.:  $125 \text{ m/s}$ ,  $2,4 \text{ m/s}$ ,  $x = +\frac{25\pi}{6} \text{ m}$ ,  $0, 0$ )

29. Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς τα δεξιά. Το κύμα δημιουργείται καθώς την χρονική στιγμή  $t=0$  η πηγή του κύματος που θεωρούμε ότι βρίσκεται στην θέση  $x=0$  αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ. κινούμενη προς τα κάτω (έχει δηλαδή αρνητική ταχύτητα). Η κατακόρυφη απόσταση ενός "όρους" και μιας "κοιλιάς" του κύματος είναι  $0,2 \text{ m}$  ενός η οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών "κοιλιάδων" του κύματος είναι  $2 \text{ m}$ . Αν κάθε σημείο του κύματος διέρχεται από την θέση ισορροπίας 60 φορές κάθε λεπτό:

A. Να κάνετε για το αρμονικό κύμα τα ακόλουθα.

A1. Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

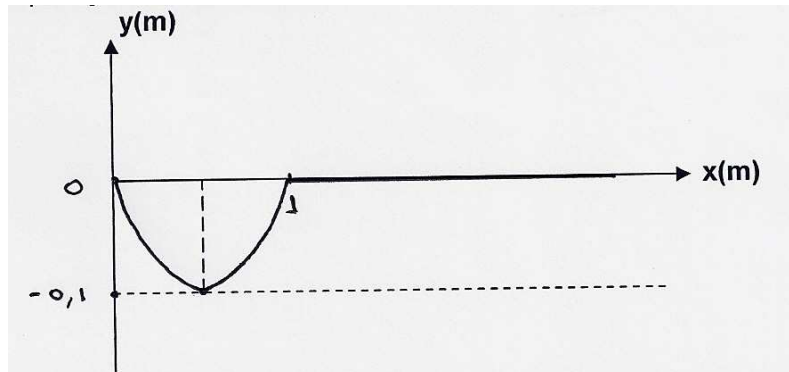
A2. Να γράψετε την εξίσωση την απομάκρυνσης του κύματος από την θέση ισορροπίας.

A3. Να βρείτε την απομάκρυνση και την ταχύτητα ταλάντωσης δύο σημείων M και N του κύματος που βρίσκονται στις θέσεις  $x_M=2 \text{ m}$  και  $x_N=4 \text{ m}$  αντίστοιχα, την χρονική στιγμή  $t_1=3 \text{ s}$ .

A4. Αν στο σημείο M υπάρχει ένα στοιχείο μάζας  $m=0,005 \text{ kg}$  να βρείτε την ολική του ενέργεια καθώς και την κινητική του ενέργεια την χρονική στιγμή  $t_2=3,25 \text{ s}$ .

A5. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=3 \text{ s}$  και  $t_3=4 \text{ s}$  καθώς και τις γραφικές παραστάσεις της μεταβολής της ταχύτητας ταλάντωσης και της επιτάχυνσης εκείνες τις χρονικές στιγμές.

B. Αν ως χρονική στιγμή  $t=0$  θεωρήσουμε τη στιγμή που το στιγμιότυπο του κύματος είναι το ακόλουθο:



**B1.** Να γράψετε την εξίσωση την απομάκρυνσης του κύματος από την θέση ισορροπίας.

**B2.** Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=3$  s και  $t_3=4$  s καθώς και τις γραφικές παραστάσεις της μεταβολής της ταχύτητας ταλάντωσης και της επιτάχυνσης εκείνες τις χρονικές στιγμές.

Δίνεται  $\pi=3,14$ .

(Απ.:  $1$  m/sec,  $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)$  (S.I.),  $0$  m,  $0,314$  m/s,  $0$  m,  $0$  m/s,  $125 \cdot 10^{-6}$  J,  $250 \cdot 10^{-6}$  J, )  $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{2} + 1 \right)$  (S.I.)

**30 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Έστω δυο σημεία Γ και Δ κατά μήκος μιας ευθείας (ε) στην οποία πρόκειται να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα της μορφής  $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ .

Η απόσταση ΓΔ είναι ίση με  $d=5 \cdot \lambda/2$  και το κύμα διαδίδεται από το Γ προς το Δ.



Τη χρονική στιγμή  $t_1$  το σημείο Δ βρίσκεται στη θέση  $-A$ .

α. Να σχεδιάσετε τμήμα του στιγμιότυπου από το Γ μέχρι το Δ για τη χρονική στιγμή  $t_1$  και να τοποθετήσετε πάνω του τα σημεία Γ και Δ.

β. Το κοντινότερο στο Γ, σημείο Ζ προς τη μεριά του Δ, στο οποίο η δυναμική ενέργεια λόγω ταλάντωσης είναι μέγιστη τη χρονική στιγμή  $t_1$ , ταλαντώνεται μετά τη

διάδοση του κύματος, με εξίσωση απομάκρυνσης-χρόνου  $y_Z = 0,2 \cdot \eta\mu \left( 2\pi t - \frac{3\pi}{2} \right)$  (S.I.).

Να βρείτε τις εξισώσεις απομάκρυνσης-χρόνου για τα σημεία Γ και Δ.

γ. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο διαδίδεται το κύμα από το Γ στο Δ.

δ. Τη χρονική στιγμή  $t_2=t_1+\Delta t$ , το σημείο Δ περνά από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή  $t_1$  και έχει θετική ταχύτητα. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος από τη θέση  $x=0$  ως  $x=x_\Delta$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_2$ .

(Απ.:  $y_\Gamma = 0,2 \cdot \eta\mu \left( 2\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$  (S.I.),  $y_\Delta = 0,2 \cdot \eta\mu \left( 2\pi t - \frac{11\pi}{2} \right)$  (S.I.),  $2,5$  sec)

**31 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Στη θέση  $x_1=6$  m γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου υπάρχει πηγή κύματος, το οποίο διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις. Θεωρούμε  $t=0$  τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στη θέση Ο στο  $x=0$ , οπότε το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση  $y=0,1 \cdot \eta\mu 10\pi t$  (S.I.) και μήκος κύματος  $\lambda=2$  m.

α. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά.

β. Ποια είναι η εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής;

γ. Ποια η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά;

δ. Να κάνετε την γραφική παράσταση της ταλάντωσης με τον χρόνο για σημείο που βρίσκεται στην θέση  $-3$  m.

ε. Να κάνετε την γραφική παράσταση του στιγμιότυπου του κύματος για τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα Οχ' για τις χρονικές στιγμές  $t_1=0,2$  s και  $t_2=0,35$  s.

(Απ.:  $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 5t + \frac{x}{2} \right)$ ,  $y_O = 0,1 \cdot \eta\mu (10\pi t + 6\pi)$ ,  $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 5t - \frac{x}{2} + 6 \right)$  (S.I.)



**B. ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ**

**32.** Δύο εγκάρσια κύματα έχουν ίσα πλάτη 2 cm, ίσα μήκη κύματος και συμβάλλουν καθώς κινούνται στην ίδια κατεύθυνση. Αν οι φάσεις των δύο κυμάτων διαφέρουν κατά  $\pi/3$  να βρείτε το πλάτος του συνισταμένου κύματος.

**(Απ.: 3,46 cm)**

**33.** Δύο ηχεία βρίσκονται σε δύο σημεία A και B που απέχουν 7 m. Τα ηχεία τροφοδοτούνται από τον ίδιο ενισχυτή και εκπέμπουν ηχητικά κύματα ίδιας φάσης τα οποία έχουν συχνότητα  $f=170$  Hz και διαδίδονται με ταχύτητα  $v=340$  m/s.

α. Ποιο είναι το μήκος κύματος  $\lambda$ ;

β. Ένας μαθητής στέκεται στο σημείο Σ που ισαπέχει από τα δύο ηχεία και που η απόστασή του από την AB είναι 6 m. Τι νομίζετε πως ακούει ο μαθητής;

γ. Υποθέστε πως ο μαθητής μετακινείται κατά 1 m παράλληλα με την ευθεία AB, σ' ένα άλλο σημείο Μ που απέχει επίσης 6 m από την AB ευθεία. Τι ακούει σ' αυτήν την περίπτωση ο μαθητής;

**(Απ.: 2 m, ενίσχυση, απόσβεση)**

**34 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ).** Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές (πηγές με ίδια φάση, πηγές σε φάση) ήχου A και B εκπέμπουν απλούς αρμονικούς ήχους της ίδιας συχνότητας και της ίδιας έντασης. Διατρέχοντας την ευθεία AB παρατηρούμε ότι στο μέσο Μ του τμήματος AB έχουμε μέγιστο του ήχου, ενώ στο σημείο Γ για το οποίο  $(ΜΓ)=4,25$  cm έχουμε τον πρώτο μηδενισμό του ήχου μετά το Μ. Αν η ταχύτητα του ήχου είναι  $v=340$  m/s, να βρείτε την συχνότητά του.

**(Απ.: 2000 Hz)**

**35.** Δύο σύγχρονες σημειακές πηγές (πηγές σε φάση)  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού αρμονικά κύματα με πλάτος  $A=3$  mm, περίοδο  $T=0,4$  s και ταχύτητα  $v=5$  m/s, ξεκινώντας να ταλαντώνονται ταυτόχρονα προς την θετική κατεύθυνση την χρονική στιγμή  $t=0$ . Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο της επιφάνειας σε απόσταση  $x_1=6$  m και  $x_2=5,5$  m από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι μετά την συμβολή των κυμάτων, ο φελλός θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.

β. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα του φελλού και ποια η επιτάχυνση του όταν βρίσκεται σε απόσταση  $y=+3$  mm από τη θέση ισορροπίας τους, μετά την συμβολή.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού από την Θ.Ι. για  $t>0$ .

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$ .

**(Απ.:  $3\sqrt{2}$  mm , 0,4 s , ,  $15\pi\sqrt{2}\cdot 10^{-3}$  m/s ,  $0,75$  m/s<sup>2</sup> ,  $y = 0$  αν  $0 \leq t \leq 1,1$  s ,**

**$y = y_2 = 3\cdot 10^{-3}\cdot \eta\mu(5\pi t - 5,5\pi)$  (S.I.) αν  $1,1$  s  $\leq t \leq 1,2$  s ,**

**$y = 3\sqrt{2}\cdot 10^{-3}\cdot \eta\mu(5\pi t - 5,75\pi)$  (S.I.) αν  $1,2$  s  $\leq t$  )**

**36 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ).** Δύο πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού είναι σε φάση (σύγχρονες) και εκπέμπουν αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους, ίδιας ταχύτητας και με μήκος κύματος  $\lambda=2$  m. Δύο σημεία A και B βρίσκονται στην επιφάνεια του υγρού και απέχουν από τις πηγές αντίστοιχα  $(ΑΠ_1)=11$  m,  $(ΑΠ_2)=20$  m και  $(BΠ_1)=15$  m,  $(BΠ_2)=18$  m.

α. Στα σημεία A και B έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση;

β. Πόσες υπερβολές αποσβεστικής συμβολής σχηματίζονται μεταξύ των A και B;

γ. Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία τομής των υπερβολών που περνούν από τα σημεία A και B με την ευθεία  $\Pi_1\Pi_2$ ;

**(Απ.: Απόσβεση, δύο υπερβολές, 3 m)**

37. Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος  $A=5$  cm, συχνότητα  $f=10$  Hz και μήκος  $\lambda=10$  cm παράγονται από δύο πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  που βρίσκονται σε φάση (σύγχρονες) και απέχουν η μία από την άλλη  $(\Pi_1\Pi_2)=d=20$  cm. Οι πηγές αρχίζουν να παράγουν τα κύματα την χρονική στιγμή  $t=0$ .

α. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης ενός σημείου, που απέχει από τις  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αποστάσεις  $d_1$  και  $d_2$  αντίστοιχα, μετά την συμβολή των κυμάτων σε αυτό. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης αυτού του σημείου και ποια η φάση του;

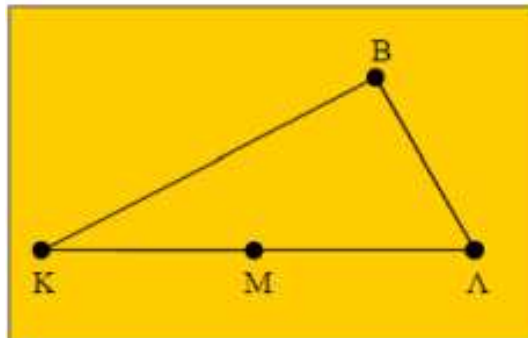
β. Πόσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος  $\Pi_1\Pi_2$  μένουν συνεχώς ακίνητα και πόσα ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

γ. Ένα σημείο που απέχει από την  $\Pi_1$  απόσταση  $d_1'=8,75$  cm και βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$  τι απομάκρυνση θα έχει από τη θέση ισορροπίας του τη

χρονική στιγμή  $t=\frac{37}{60}$  s;

(Απ.:  $2A \left| \sin \left( \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \right) \right| - 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda} \right)$ , 4 σημεία, 3 σημεία,  $2,5\sqrt{6}$  cm)

38 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ). Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Κ και Λ παράγουν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια αρμονικά κύματα τα οποία διαδίδονται χωρίς απώλειες ενέργειας. Τα κύματα έχουν πλάτος  $A=4$  cm και μήκος  $\lambda=2$  cm. Δύο όρη ξεκινούν ταυτόχρονα από τις πηγές Κ και Λ με ταχύτητα διάδοσης  $v=4$  cm/s. Τη χρονική στιγμή  $t_1$  κατά την οποία το όρος από την πηγή Λ φτάνει στο σημείο Β της επιφάνειας του υγρού, το όρος από την πηγή Κ έχει διανύσει τα  $3/4$  της απόστασης ΚΒ.



Αν  $(\Lambda B)=6$  cm και η γωνία Β είναι ορθή να βρείτε:

α. Αν στο σημείο Β έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.

β. Ποια χρονική στιγμή  $t_2$  μετά την  $t_1$  δύο όρη θα συναντηθούν για πρώτη φορά στο σημείο Β;

γ. Πόσες υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης υπάρχουν μεταξύ των σημείων Λ, Β;

δ. Αν μετά τη συμβολή των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού, κάποια χρονική στιγμή, η απομάκρυνση στο μέσον Μ του τμήματος ΚΛ είναι  $y_M=+A$ , ποια θα είναι η απομάκρυνση και η ταχύτητα την ίδια χρονική στιγμή στο Β;

(Απ.: 2 s, 7 υπερβολές, -4 cm,  $16\pi\sqrt{3}$  cm/s)

39. Δύο σύγχρονες πηγές παράγουν αρμονικά ηχητικά κύματα ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας στον αέρα. Σ' ένα σημείο που απέχει  $d_1=2$  m από τη μια πηγή και  $d_2=2,5$  m από την άλλη, ο ήχος δεν ακούγεται. Να βρείτε τις δυνατές συχνότητες των πηγών. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι  $v=344$  m/s.

(Απ.:  $(2N+1) \cdot 344$  Hz)

40. Σε δύο σημεία Κ και Λ της ήρεμης επιφάνειας υγρού δημιουργούνται τη χρονική στιγμή  $t=0$  ταυτόχρονα δύο πηγές αρμονικών κυμάτων πλάτους  $A=3$  cm και συχνότητας  $f=10$  Hz. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι  $u=1$  m/s. Αν σ' ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού, που απέχει από τις πηγές αποστάσεις αντίστοιχα  $(MK)=d_1=80$  cm και  $(ML)=d_2=57,5$  cm, υπάρχει μικρός φελλός, να βρείτε:

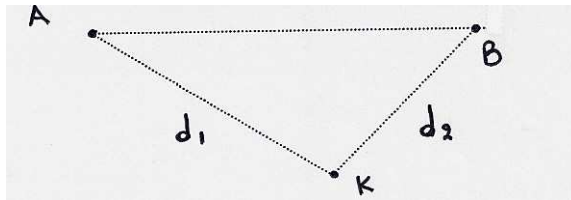
α. Πότε αρχίζει να κινείται ο φελλός;

β. Την εξίσωση που μας δίνει την απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$  και την γραφική της παράσταση.

γ. Την απομάκρυνση του φελλού από την θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές  $t_1=0,5$  s,  $t_2=0,7$  s και  $t_3=1$  s.

(Απ.:  $0,575$  s,  $y=3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \cdot \eta\mu 2\pi(10 \cdot t - 6,875)$  (S.I.),  $0$ ,  $3$  cm,  $3$  cm)

41. Στο ακόλουθο σχήμα έχουμε δύο ηχεία Α και Β τα οποία εκπέμπουν πανομοιότυπα ημιτονοειδή ηχητικά κύματα με την ίδια σταθερή συχνότητα. Στο σημείο Κ, που απέχει από τα ηχεία αποστάσεις  $d_1=5$  m και  $d_2=4$  m αντίστοιχα, έχει τοποθετηθεί ένα μικρόφωνο. Αν η ταχύτητα του ήχου είναι  $u=340$  m/s, να βρείτε για ποιες συχνότητες στο σημείο Κ παρουσιάζεται ενισχυτική συμβολή και για ποιες στο σημείο αυτό δεν ακούμε καθόλου ήχο.



(Απ.:  $(2N+1) \cdot 170$  Hz και  $N \cdot 340$  Hz)

42 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Για να μετρήσουμε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια υγρού, κάνουμε το παρακάτω πείραμα: Δημιουργούμε στην επιφάνεια του υγρού δύο σύγχρονες πηγές (πηγές σε φάση)  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αρμονικών κυμάτων με συχνότητα  $f=20$  Hz. Η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές ενός σημείου Α που παραμένει ακίνητο είναι  $d_2-d_1=145$  cm, ενώ η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές ενός άλλου σημείου Β που παραμένει επίσης ακίνητο είναι  $d_2'-d_1'=255$  cm. Αν στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπάρχουν ακόμη 10 ακίνητα σημεία, να βρείτε την ταχύτητα  $u$  των κυμάτων.

(Απ.:  $2$  m/s)

43. Σε δύο σημεία  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  της ήρεμης επιφάνειας υγρού δημιουργούνται δύο αρμονικές διαταραχές της μορφής  $y=2 \cdot \eta\mu 10\pi t$  ( $y$  σε cm,  $t$  σε s). Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι  $u=1$  m/s και ένα κομμάτι φελλού μάζας  $m=10^{-3}$  kg απέχει από τα σημεία  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αποστάσεις  $d_1=40$  cm και  $d_2=35$  cm αντίστοιχα.

α. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης του φελλού μετά την συμβολή των κυμάτων.

β. Να βρείτε την μέγιστη επιτάχυνση του φελλού.

γ. Να βρείτε την μέγιστη κινητική ενέργεια του φελλού.

(Απ.:  $y=2\sqrt{2} \cdot \eta\mu 2\pi(5 \cdot t - \frac{15}{8})$  (S.I.),  $2\sqrt{2} \pi^2$  m/s<sup>2</sup>,  $4\pi^2 \cdot 10^{-5}$  J)

44 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Δύο πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  με ίδια φάση βρίσκονται στο ίδιο ελαστικό μέσο και εκπέμπουν αρμονικά κύματα με συχνότητα  $f=10$  Hz, ταχύτητα  $u=20$  m/s και ίδιο πλάτος. Για δύο σημεία Α και Β, που βρίσκονται δεξιά της μεσοκαθέτου του τμήματος  $\Pi_1\Pi_2$ , η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές είναι αντίστοιχα  $\Delta d_A=40$  m και  $\Delta d_B=50$  m.

α. Να βρείτε πόσα σημεία μεταξύ των Α και Β ταλαντώνονται με το μέγιστο πλάτος.  
β. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω σε υπερβολές ενισχυτικής συμβολής. Αν οι δύο αυτές υπερβολές τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$  στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση (ΜΝ).

(Απ.: 4 σημεία, 5 m)

**45 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  βρίσκονται στην επιφάνεια ενός υγρού και αρχίζουν να ταλαντώνονται την χρονική στιγμή  $t=0$  με εξίσωση της μορφής  $y=0,1\eta\mu\omega t$  (S.I.). Οι δύο πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d$  και τα κύματα που δημιουργούν διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα 2 m/s. Δύο σημεία ενισχυτικής συμβολής Κ και Λ απέχουν από τις πηγές αποστάσεις τέτοιες ώστε  $(\Pi_1Κ)-(\Pi_2Κ)=0,8$  m και  $(\Pi_1Λ)-(\Pi_2Λ)=1,6$  m. Οι υπερβολές που περνάνε από τα σημεία Κ και Λ τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα  $(\Pi_1\Pi_2)$  στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα με  $(\Pi_1Μ)=1$  m. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ υπάρχουν άλλα πέντε (εκτός των Μ και Ν) σημεία ενισχυτικής συμβολής.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και την συχνότητα των κυμάτων.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση  $d$  των δύο πηγών.

γ. Να βρείτε την απόσταση (ΜΝ).

δ. Να βρείτε την απόσταση από την πηγή  $\Pi_1$  του πλησιέστερου στην μεσοκάθετο σημείου Σ του ευθύγραμμου τμήματος, του οποίου η ενέργεια ταλάντωσης του ισούται με το 50% της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Κ.

ε. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή τα σημεία Κ και Σ βρίσκονται για 1<sup>η</sup> φορά σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης μετά την έναρξη της συμβολής σε αυτά εάν το Κ ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή 0,5 sec.

στ. Να βρείτε πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική φάση της πηγής  $\Pi_2$ , ώστε μετά την συμβολή, ένας φελλός που τοποθετείται στο σημείο Κ να παραμένει διαρκώς ακίνητος.

ζ. Να απεικονίσετε γραφικά την συνάρτηση που δείχνει πως μεταβάλλεται η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο για το σημείο Κ.

(Απ.: 0,4m, 5Hz, 2,8m, 1,2m, 1,45m, 0,95s,  $\pi$  rad)

**46.** Με κατάλληλη διάταξη δημιουργούμε στην επιφάνεια υγρού δύο πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  με ίδια φάση που ταλαντώνονται αρμονικά με συχνότητα  $f=1$  Hz και πλάτος ταλάντωσης  $A=1$  cm. Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι  $u=40$  cm/s και ένας μικρός φελλός απέχει από τις πηγές αντίστοιχα  $d_1=120$  cm και  $d_2=40$  cm αντίστοιχα, να βρείτε:

α. Να γράψετε την συνάρτηση που δείχνει πως μεταβάλλεται με τον χρόνο η ταχύτητα ταλάντωσης του φελλού και να την παραστήσετε γραφικά.

β. Την απομάκρυνση  $y_1$  του φελλού από την θέση ισορροπίας του την χρονική στιγμή  $t_1=\frac{49}{12}$  s.

γ. Την χρονική στιγμή  $t_2$  που ο φελλός βρίσκεται για πρώτη φορά σε θέση με απομάκρυνση  $y_2=2$  cm από την θέση ισορροπίας του.

(Απ.:  $v = 0$  αν  $0 \leq t \leq 1s$  ,  $v = v_2 = 0,02\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 2\pi)$  (S.I.) αν  $1s \leq t \leq 3s$  ,  $v = 0,04\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 4\pi)$  (S.I.) αν  $3s \leq t$  , 1 cm, 3,25 s)

**47.** Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  βρίσκονται στο ίδιο ελαστικό μέσο και εκπέμπουν αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους Α. Στα σημεία Μ και Ν του μέσου (που βρίσκονται πάνω στην ευθεία  $\Pi_1\Pi_2$ ) όπου  $(ΜΝ)=15$  cm, περνούν η 3<sup>η</sup> και 5<sup>η</sup> υπερβολή ενισχυτικής συμβολής αντίστοιχα.

α. Ποιο είναι το μήκος κύματος των κυμάτων;

β. Να βρείτε τον αριθμό των υπερβολών απόσβεσης που περνάνε ανάμεσα στα Μ και Ν.

γ. Αν η δεύτερη υπερβολή ενισχυτικής συμβολής τέμνει την ευθεία  $\Pi_1\Pi_2$  στο  $P_1$ , ενώ η πιο κοντινή της υπερβολή απόσβεσης τέμνει την  $\Pi_1\Pi_2$  στο  $P_2$ , ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του μέσου του  $P_1P_2$ ;

(Απ.: 15 cm, 2,  $A\sqrt{2}$ )

48. Στην επιφάνεια ενός υγρού υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  που απέχουν μεταξύ τους  $d=20$  cm και εκπέμπουν αρμονικά κύματα με μήκος κύματος  $\lambda=10$  cm, ίδια συχνότητα και ίδιο πλάτος  $A$ .

α. Πόσο απέχουν μεταξύ τους δύο διαδοχικά σημεία του τμήματος  $\Pi_1\Pi_2$  στα οποία έχουμε απόσβεση;

β. Να βρείτε τον αριθμό των σημείων μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή.

γ. Με κέντρο το  $\Pi_1$  και ακτίνα 10 cm σχεδιάζουμε μια περιφέρεια η οποία τέμνει την περιφέρεια με κέντρο το  $\Pi_2$  και 15 cm σε δύο σημεία. Στα σημεία τομής των περιφερειών θα έχουμε ενισχυτική συμβολή ή απόσβεση;

(Απ.: 5 cm, 3 σημεία, απόσβεση)

49. Δύο πηγές αρμονικών κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αρχίζουν τη χρονική στιγμή  $t=0$  να ταλαντώνονται με πλάτος  $A=0,02$  m και συχνότητα  $f=10$  Hz. Το μήκος κύματος των κυμάτων που παράγονται είναι  $\lambda=2$  m. Οι πηγές απέχουν μεταξύ τους  $(\Pi_1\Pi_2)=r=7$  m.

α. Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων και να βρείτε τη χρονική στιγμή που θα έχουμε συμβολή των κυμάτων σε όλο το ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$ .

β. Σε ποια σημεία του τμήματος  $\Pi_1\Pi_2$  θα έχουμε ενισχυτική συμβολή και σε ποια απόσβεση; Πόσες υπερβολές ενισχυτικής συμβολής υπάρχουν; Για ποιες τιμές του  $r$  ο αριθμός των παραπάνω υπερβολών παραμένει ίδιος;

γ. Ξεκινώντας από το μέσο  $O$  του  $\Pi_1\Pi_2$  να κάνετε τη γραφική παράσταση του πλάτους της ταλάντωσης των σημείων του  $\Pi_1\Pi_2$  μέχρι το πιο κοντινό στις πηγές σημείο ενισχυτικής συμβολής.

δ. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου του  $\Pi_1\Pi_2$  που απέχει από το  $O$  απόσταση  $x=0,25$  m;

(Απ.:  $y_1 = y_2 = 0,02\eta\mu(20\pi t - \pi x)$  (S.I.), 0,35 s, 7 σημεία ενίσχυσης και 6 σημεία απόσβεσης,  $6 \leq r \leq 8, 0,02\sqrt{2}$  m)

50. Δύο υλικά σημεία  $K$  και  $L$  της ήρεμης επιφάνειας νερού εκτελούν ταλαντώσεις με εξισώσεις  $y_1 = A\eta\mu(20\pi t)$  και  $y_2 = A\eta\mu(20\pi t - \pi/3)$  (S.I.) αντίστοιχα.

α. Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που παράγονται από τα σημεία  $K$  και  $L$ .

β. Με ποια συχνότητα ταλαντώνεται το υλικό σημείο  $\Sigma$  μετά την συμβολή των κυμάτων;

γ. Να γράψετε την εξίσωση του πλάτους ταλάντωσης ενός υλικού σημείου μετά την συμβολή των κυμάτων σε αυτό και να αποδείξετε ότι σε όλα τα σημεία της επιφάνειας του νερού που η διαφορά των αποστάσεών τους από τα  $K$  και  $L$  δίνεται από την σχέση:

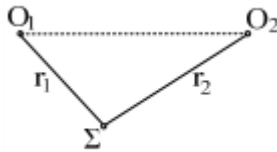
$$|r_1 - r_2| = \left(N - \frac{1}{6}\right) \cdot \lambda$$

όπου  $\lambda$  το μήκος κύματος και  $N=0,1,2,\dots$ , έχουμε ενίσχυση.

(Απ.:  $y_1 = A\eta\mu(20\pi t - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda})$  και  $y_2 = A\eta\mu(20\pi t - \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} - \pi/3)$ ,

$$A' = 2A \cdot \left| \sigma\upsilon\nu 2\pi \left( \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} + \frac{1}{12} \right) \right|$$

**51 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Δύο πηγές  $O_1$  και  $O_2$  μπορούν να ταλαντώνονται σε κατακόρυφη διεύθυνση με συχνότητα 1 Hz και πλάτος 0,1 m και να δημιουργούν κύματα στην επιφάνεια ενός υγρού τα οποία ξεκινούν να διαδίδονται με ταχύτητα 2 m/s.



Οι πηγές ξεκινούν την ταλάντωσή τους από τη θέση ισορροπίας κινούμενες προς τη θετική κατεύθυνση, η πρώτη για  $t_0=0$  και η δεύτερη τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75$  s.

- Να βρεθούν οι εξισώσεις των κυμάτων που δημιουργούνται.
- Ένα σημείο  $\Sigma$  απέχει από τις πηγές αποστάσεις  $r_1=4$  m και  $r_2=4,5$  m. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$  μετά από τη συμβολή των κυμάτων.
- Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας  $m=1$  mg που βρίσκεται στο σημείο  $\Sigma$ ;

(Απ.:  $y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{r_1}{2})$  και  $y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(t - \frac{r_2}{2} - \frac{3}{4})$  (S.I.),  $y = 0,2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi)$  (S.I.),  $8 \cdot 10^{-7}$  J)

**52 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Στην επιφάνεια ενός υγρού ηρεμούν δύο πηγές κυμάτων  $O_1$  και  $O_2$  που μπορούν να εκτελέσουν κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους  $A=0,2$  m με συχνότητες  $f=1$  Hz, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $(O_1O_2)=4$  m. Κάποια στιγμή έστω,  $t_0=0$ , η πηγή  $O_1$  ξεκινά την ταλάντωσή της κινούμενη προς τα πάνω. Η πηγή  $O_2$  όμως καθυστερεί να ξεκινήσει την ταλάντωσή της κατά 0,5 sec, κινούμενη με τον ίδιο τρόπο. Στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται έτσι δύο κύματα, τα οποία δεχόμαστε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος, με ταχύτητα  $v=2$  m/s.

- Από ποιες εξισώσεις περιγράφονται τα κύματα τα οποία δημιουργούνται;
- Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου M, το οποίο βρίσκεται στο μέσο του τμήματος  $O_1O_2$ .
- Ένα άλλο σημείο  $\Sigma$  ταλαντώνεται με πλάτος 0,4 m, μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων. Να βρεθεί μια σχέση που να συνδέει τις αποστάσεις του σημείου  $\Sigma$  από τις δύο πηγές.
- Πόσες υπερβολές ενισχυτικής συμβολής εμφανίζονται στην επιφάνεια του υγρού;

(Απ.:  $y_1 = 0,2 \eta\mu(2\pi t - \pi r_1)$  και  $y_2 = 0,2 \eta\mu(2\pi t - \pi r_2 - \pi)$  (S.I.),  $A_M = 0,4$  υπερβολές,  $r_2 - r_1 = 2k - 1$  με  $k \in \mathbb{Z}$ )

**53.** Κατά μήκος μιας χορδής διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με εξισώσεις  $y_1=8 \cdot \eta\mu(500\pi t - 10x - \pi/3)$  και  $y_2=8 \cdot \eta\mu(500\pi t - 10x)$  ( $x, y_1, y_2$  σε cm,  $t$  σε sec). Να βρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την συνολική διαταραχή. Είναι η συνολική διαταραχή κύμα; Αν είναι ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα κάθε μορίου της χορδής;

(Απ.:  $8\sqrt{3} \cdot \eta\mu(500\pi t - 10x - \pi/6)$ ,  $v_{\max} = 40\sqrt{3} \cdot \pi$  m/s)

**54 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ).** Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  εκπέμπουν στο ίδιο ελαστικό μέσο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους  $A$  και ίδιας συχνότητας  $f$ . Αν η απόσταση των πηγών  $(\Pi_1\Pi_2)$  είναι μικρότερη του μήκους κύματος  $\lambda$ , να αποδείξετε ότι όλα τα υλικά σημεία του μέσου διάδοσης που την ίδια χρονική στιγμή η φάση της ταλάντωσης τους διαφέρει από την φάση των πηγών κατά  $\pi$  rad βρίσκονται πάνω σε μια κλειστή καμπύλη και οι αποστάσεις τους  $r_1$  και  $r_2$  από τις πηγές συνδέονται με τη σχέση  $r_1+r_2=\lambda$ .

**Γ. ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ**

55. Ένα κύμα συχνότητας  $f=500$  Hz διαδίδεται με ταχύτητα  $u=360$  m/s.

α. Πόσο απέχουν δύο σημεία κατά μήκος μιας ακτίνας διάδοσης του κύματος, τα οποία παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $\Delta\phi=60^\circ$ ;

β. Αν το κύμα λόγω συμβολής με άλλο όμοιο, που διαδίδεται σε αντίθετη κατεύθυνση, δώσει κύμα στάσιμο, πόσο νομίζετε ότι θα απέχουν δύο διαδοχικοί δεσμοί;

**(Απ.: 0,12 m, 0,36 m)**

56. Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας  $f=850$  Hz διαδίδεται οριζόντια με ταχύτητα  $u$ .

Το κύμα προσπίπτει σε κατακόρυφο τοίχο, οπότε ανακλάται σχηματίζοντας έτσι στάσιμο κύμα με δεσμό στον τοίχο. Αν η πρώτη κοιλία (από τον τοίχο) απέχει από τον τέταρτο δεσμό απόσταση  $x=0,5$  m να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης του τρέχοντος κύματος.

**(Απ.: 340 m/s)**

57. Εργαστηριακή πηγή μικροκυμάτων τοποθετείται απέναντι από επίπεδη μεταλλική πλάκα. Μεταξύ πηγής και πλάκας τοποθετείται δέκτης μικροκυμάτων. Μετακινούμε σιγά-σιγά τον δέκτη πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει κάθετα την πηγή με την πλάκα και παρατηρούμε 10 αυξομειώσεις της ένδειξης του δέκτη για μετακίνηση 15 cm.

α. Γιατί συμβαίνει αυτό;

β. Να υπολογίσετε την συχνότητα της πηγής, αν γνωρίζετε ότι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι  $u=3 \cdot 10^8$  m/s.

**(Απ.:  $10^{10}$  Hz)**

58. Η εξίσωση ενός στάσιμου κύματος είναι:

$$y=2 \cdot \text{συν}(2\pi x/3) \cdot \eta\mu 20\pi t \quad (x, y \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

α. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών κοιλιών.

γ. Τι ταχύτητα έχει τη χρονική στιγμή  $t_1=9/8$  s ένα σημείο του μέσου που απέχει  $d=2$  cm από τη θέση  $x=0$ .

**(Απ.:  $y = \eta\mu 2\pi(10t \mp \frac{x}{3})$  (x, y σε cm, t σε s), 1,5 cm, 0)**

59. Σ' ένα ομογενές ελαστικό μέσο τα σημεία  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  με  $(\Pi_1\Pi_2)=20$  cm είναι πηγές κυμάτων ίδιας φάσης με συχνότητα  $f=5$  Hz, πλάτος  $A=4$  cm και μήκος κύματος  $\lambda=4$  cm. Στο μέσο  $O$  του  $\Pi_1\Pi_2$  τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  τα κύματα συναντώνται και το σημείο  $O$  ταλαντώνεται. Αν για την ταλάντωση του  $O$  τη στιγμή  $t_0=0$  είναι  $y=0$  και  $v>0$ :

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει.

β. Να βρείτε τις θέσεις και τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που δημιουργούνται μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ .

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης  $y$  σε συνάρτηση με τον χρόνο για την δεύτερη προς τα δεξιά κοιλία μετά το σημείο  $O$ .

**(Απ.:  $y=8 \cdot \text{συν}(\pi x/2) \cdot \eta\mu 10\pi t$  (x, y σε cm, t σε s), 10 δεσμοί/11 κοιλίες,  $y=0,08 \cdot \eta\mu 10\pi t$  (S.I.))**

60. Τα κύματα που διαδίδονται σ' ένα ελαστικό μέσο έχουν ταχύτητα  $u=1000$  m/s και η συχνότητά τους κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1200 Hz και 1800 Hz. Αν δύο σημεία του μέσου που βρίσκονται σε απόσταση  $L=1$  m μεταξύ τους, είναι δεσμοί στάσιμου κύματος, να βρείτε την ακριβή συχνότητα του κύματος.

**(Απ.: 1500 Hz)**

61. Μια χορδή ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$y=10\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot\frac{x}{3}\right)\cdot\eta\mu 50\pi t \quad (x, y \text{ σε cm, } t \text{ σε s})$$

Να βρείτε:

α. Το πλάτος και την ταχύτητα των κυμάτων που η συμβολή τους μπορεί να δώσει αυτήν την ταλάντωση.

β. Την απόσταση  $\Delta d$  μεταξύ δύο διαδοχικών ακινήτων σημείων της χορδής.

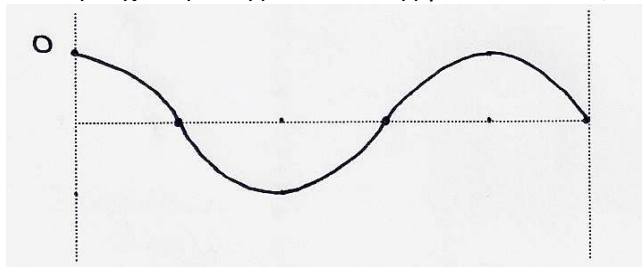
γ. Την ταχύτητα που έχει τη χρονική στιγμή  $t=4,9$  s ένα σημείο της χορδής το οποίο απέχει από το άκρο της  $x=3$  cm.

(Απ.: 5 cm-0,75 m/s, 1,5 cm, -5π m/s)

62. Μια κρεμαστή γέφυρα πρόκειται να κατασκευαστεί σε μια κοιλάδα, όπου είναι γνωστό ότι ο άνεμος φυσά ανά σταθερά χρονικά διαστήματα 5 s. Αν η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων κατά μήκος της γέφυρας είναι  $v=400$  m/s, για ποιο μήκος της γέφυρας θα υπάρχει ο μεγαλύτερος κίνδυνος να συμβεί συντονισμός;

(Απ.: 1000 m)

63 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Όταν η συχνότητα της ταλάντωσης του σημείου O της χορδής του ακόλουθου σχήματος είναι  $f_1=300$  Hz, στη χορδή σχηματίζονται τρεις δεσμοί. Πόσοι δεσμοί θα σχηματίζονται όταν η συχνότητα της ταλάντωσης γίνει  $f_2=540$  Hz;



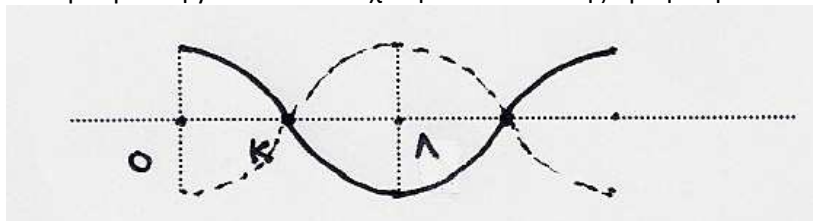
(Απ.: 5 δεσμοί)

64. Δύο όμοια αρμονικά κύματα, κύματα πλάτους  $A=2$  cm και συχνότητας  $f=100$  Hz, διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σ' ένα ελαστικό μέσο με ταχύτητα  $v=30$  m/s, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα σχηματίζοντας στάσιμο κύμα. Έστω ότι στη θέση  $x=0$  (σημείο O) του στάσιμου κύματος που δημιουργείται υπάρχει κοιλιά και την χρονική στιγμή  $t=0$  η απομάκρυνση στη θέση αυτή είναι  $y=0$  και η ταχύτητα θετική.

α. Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για τα σημεία K και Λ του μέσου.

β. Να βρεθούν οι θέσεις δύο υλικών σημείων του μέσου ανάμεσα στα σημεία O και Λ, όπου το καθένα έχει ενέργεια ταλάντωσης ίση με τα  $75/100$  της ενέργειας ταλάντωσης των υλικών σημείων που βρίσκονται στις θέσεις των κοιλιών, δεδομένου ότι σε όλα τα υλικά σημεία του μέσου αντιστοιχεί ίδια μάζα.

γ. Να βρεθεί η απομάκρυνση και η ταχύτητα της τρίτης κοιλίας μετά την κοιλιά στο Λ, όταν το Λ έχει απομάκρυνση  $y=-1$  cm και ταχύτητα ταλάντωσης αρνητική.



(Απ.:  $y=0-y=4\cdot 10^{-2}\eta\mu(200\pi t+\pi)$  (S.I.), 2,5 cm ή 12,5 cm, +1 cm,  $2\pi\sqrt{15}$  m/s)



**65 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  φτάνει στο σημείο Ο στη θέση  $x=0$ . Το σημείο Ο αρχίζει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του τη στιγμή  $t_1=0,5$  s ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί κατά 0,25 m δεξιότερα του Ο. Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του Ο είναι 0,4 m.

α. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος, το πλάτος και η περίοδος.

β. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος για τη χρονική στιγμή  $t_1=3$  s, για τα σημεία του θετικού ημι-άξονα.

Κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο κύμα, από δεξιά προς τα αριστερά, με την ίδια συχνότητα και πλάτος, το οποίο τη στιγμή  $t_0=0$ , φτάνει σε ένα σημείο Κ, στη θέση  $x_K=3,5$  m, το οποίο επίσης αρχίζει να ταλαντώνεται προς τη θετική κατεύθυνση.

δ. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αυτού.

ε. Τα δύο κύματα συμβάλλουν και έτσι προκύπτει ένα στάσιμο κύμα. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών στις θέσεις 0 ως και 3,5 m.

στ. Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη παραπάνω περιοχή, τη χρονική στιγμή  $t_3=9$  s.

(Απ.: **0,2m, 1m, 2s,  $y = 0,2\eta\mu(\pi t - 2\pi x)$  (S.I.),  $y = 0,2\eta\mu(\pi t + 2\pi x - 7\pi)$  (S.I.),  $y = 0,4\eta\mu 20\pi x$  (S.I.)**)

**66. (ΘΕΜΑ Γ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2003)** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους  $A=0,08$  m και μήκους κύματος  $\lambda=2$  m διαδίδεται κατά τη θετική φορά σε οριζόντια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά την διεύθυνση του άξονα  $x'$ . Θεωρούμε ότι το υλικό σημείο Ο της χορδής στη θέση  $x=0$  τη χρονική στιγμή  $t=0$  έχει μηδενική απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του και θετική ταχύτητα. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $u=100$  m/s.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος στο S.I.

γ. Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης στοιχειώδους τμήματος της χορδής μάζας  $m=0,002$  kg. (Να θεωρήσετε το στοιχειώδες τμήμα της χορδής ως υλικό σημείο).

δ. Έστω ότι στην παραπάνω χορδή διαδίδεται ταυτόχρονα άλλο ένα κύμα πανομοιότυπο με το προηγούμενο, αλλά αντίθετης φοράς και δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στη θέση  $x=0$ . Να υπολογίσετε στον θετικό ημιάξονα την απόσταση του 11<sup>ου</sup> δεσμού του στάσιμου κύματος από την θέση  $x=0$ .

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$ .

(Απ.: **50 Hz, 0,64 J, 10,5 m**)

**67.** Σε χορδή μήκους  $L=0,9$  m, η οποία έχει τα δύο άκρα της ακλόνητα στερεωμένα, δημιουργούνται στάσιμα κύματα που προέρχονται από τη συμβολή δύο τρεχόντων κυμάτων με μήκος κύματος  $\lambda$ .

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υλικών σημείων της χορδής που πάλλονται με μέγιστο πλάτος, αν δίνεται ότι το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων ισούται με  $\lambda=0,6$  m.

β. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή που η πλησιέστερη κοιλία στο αριστερό άκρο της χορδής βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

γ. Να υπολογίσετε κατά πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων, ώστε στη χορδή να δημιουργηθούν 5 κοιλίες.

δ. Στην περίπτωση όπου στη χορδή δημιουργούνται 5 κοιλίες, να υπολογίσετε το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος που δημιουργείται στον αέρα εξαιτίας της

ταλάντωσης της χορδής, αν δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων στη χορδή ισούται με  $v_{\text{χορ}}=162 \text{ m/s}$ .

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα:  $v_{\text{ηχ}}=340 \text{ m/s}$ .

(Απ.: 4 δεσμοί και 3 κοιλίες, -0,24 m, 0,755 m)

68. Δύο αρμονικά κύματα με εξισώσεις της μορφής  $y_1 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t - k \cdot x)$  και  $y_2 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + k \cdot x)$  με  $k$  θετική ποσότητα, διαδίδονται ταυτόχρονα με ταχύτητα  $u=0,8 \text{ m/s}$ , σε γραμμικό ελαστικό μέσο που συμπίπτει με τον άξονα  $x'Ox$ . Τα δύο κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Η απόσταση μεταξύ του σημείου  $O$  και του πλησιέστερου στο σημείο αυτό δεσμού ισούται με  $d_1=4 \text{ cm}$ . Το πλάτος της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται σε κοιλία του στάσιμου κύματος ισούται με  $0,2 \text{ m}$ .

α. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων, καθώς και αυτή του στάσιμου κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου  $O$  σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των δεσμών που βρίσκονται μεταξύ των σημείων  $Z(x_1=+0,32 \text{ m})$  και  $\Theta(x_2=-0,32 \text{ m})$ . Θεωρείστε για τις πράξεις  $\pi^2 \approx 10$ .

(Απ.:  $y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu(10\pi t - 12,5\pi x)$  και  $y_2 = 0,1 \cdot \eta\mu(10\pi t + 12,5\pi x)$  (S.I.),

$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(12,5\pi x) \cdot \eta\mu(10\pi t)$ ,  $v = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi t)$ ,  $a = -200 \cdot \eta\mu(10\pi t)$ , 8 δεσμοί)

69 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο εγκάρσια ημιτονοειδή κύματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = 2,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 20t - \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right) \text{ και } y_2 = 2,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 20t + \frac{x}{6} \right)$$

με τα  $y_1$  και  $y_2$  μετρώνται σε  $\text{cm}$  και ο χρόνος  $t$  σε  $\text{sec}$ .

α. Να βρείτε την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή αυτών των δύο κυμάτων.

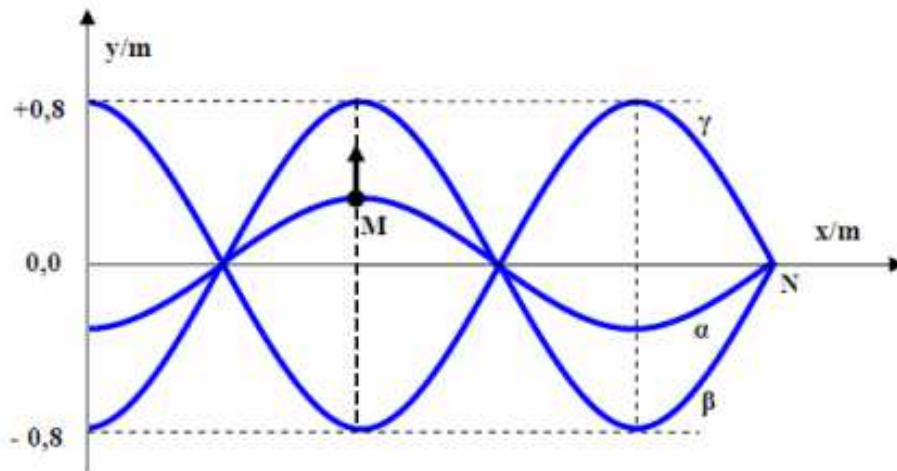
γ. Ποια είναι τη χρονική στιγμή  $t = \frac{9}{8} \text{ s}$  η ταχύτητα ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου με συντεταγμένη  $x = +1,5 \text{ cm}$ ;

(Απ.: 0,05 s, 6 cm, 1,2 m/s,  $y = 0,05 \cdot \eta\mu \frac{100\pi x}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu(40\pi t)$  (S.I.), -2π m/s)

70 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ). Σε μια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους, έχει διαμορφωθεί στάσιμο κύμα της μορφής:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu(\omega t), \text{ με } A=0,4 \text{ m}$$

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται τρία στιγμιότυπα  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  κατά τη σειρά που εμφανίζονται, στην περιοχή από  $x=0$  ως  $x_N=0,8 \text{ m}$ . Τα στιγμιότυπα αυτά, αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές  $t_\alpha$ ,  $t_\beta$  και  $t_\gamma$  με  $t_\beta - t_\alpha = T/6$  όπου  $T$  η περίοδος των ταλαντώσεων, ενώ κατά την απ' ευθείας μετάβαση από το στιγμιότυπο  $\beta$  στο στιγμιότυπο  $\gamma$ , είναι  $t_\gamma - t_\beta = 12,5 \text{ ms}$ .



Να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων από την συμβολή των οποίων προκύπτει το στάσιμο κύμα.

β. Την ταχύτητα στο σημείο Μ την χρονική στιγμή  $t_\alpha$ .

γ. Σε πόσο χρόνο από την χρονική στιγμή  $t_\alpha$ , η ταχύτητα του Μ θα μηδενιστεί στιγμιαία για δεύτερη φορά.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στην ίδια περιοχή με αυτή του σχήματος, τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο στο Μ θα περνά από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή  $t_\alpha$ . Στο στιγμιότυπο αυτό να δείξετε και τη φορά της ταχύτητας του Μ.

(Απ.:  $25,6 \text{ m/s}$ ,  $\pm 32\pi\sqrt{3} \text{ m/s}$ ,  $\frac{50}{3} \text{ ms}$ )

**71 (ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ/ΣΥΝΟΛΟ).** Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς μέσου το οποίο εκτείνεται κατά τη διεύθυνση  $x'$ , δημιουργείται στάσιμο εγκάρσιο κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 0,06 \cdot \sigma\upsilon\upsilon(10\pi x) \cdot \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

α. Να βρείτε το πλάτος, την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των δύο τρεχόντων κυμάτων των οποίων η συμβολή δημιούργησε το στάσιμο κύμα.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων που μετά την συμβολή τους δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

γ. Πόσο είναι το πλάτος ταλάντωσης δύο σημείων Α, Β του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στις θέσεις  $x_1 = -25 \text{ cm}$  και  $x_2 = +25 \text{ cm}$  αντίστοιχα;

δ. Να βρείτε τον αριθμό  $n$  των κοιλιών του στάσιμου κύματος που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Α και Β.

ε. Μεταβάλλουμε κατάλληλα τη συχνότητα των συμβαλλόντων κυμάτων, χωρίς να μεταβάλλουμε το πλάτος τους, οπότε δημιουργείται κατά μήκος του ελαστικού μέσου ένα νέο στάσιμο κύμα. Διαπιστώνουμε ότι μεταξύ των σημείων Α και Β του ελαστικού μέσου σχηματίζονται  $n-1$  κοιλίες. Δεδομένου ότι η απόσταση των σημείων Α και Β δεν μεταβλήθηκε και ότι δεν μεταβάλλεται και η κινητική τους κατάσταση:

i) Ποιο είναι το νέο μήκος κύματος και η νέα περίοδος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα;

ii) Να γράψετε την εξίσωση του νέου στάσιμου κύματος.

(Απ.:  $3 \text{ cm}$ ,  $0,2 \text{ s}$ ,  $20 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ m/s}$ ,  $y = 0,03 \cdot \eta\mu(10\pi t \mp 10\pi x) \text{ (S.I.)}$ ,  $0$ ,  $5$  κοιλίες,  $25 \text{ cm}$ ,  $0,25 \text{ s}$ ,  $y = 0,06 \cdot \sigma\upsilon\upsilon(8\pi x) \cdot \eta\mu(8\pi t) \text{ (S.I.)}$ )

**Δ. ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER**

**72.** Μια αμαξοστοιχία απομακρύνεται από τον σταθμό με σταθερή ταχύτητα και η σειρήνα της παράγει ήχο συχνότητας 3000 Hz.

α. Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητά της ώστε ένας παρατηρητής στο σταθμό να ακούει ήχο συχνότητας ίσης με τα  $(11/12)$  της συχνότητας της σειρήνας;

β. Ποιο το μήκος κύματος που τότε "αντιλαμβάνεται" ο παρατηρητής;

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι  $v_{\eta\chi}=330$  m/s.

**(Απ.: 30 m/s, 0,12 m)**

**73.** Δύο αυτοκίνητα Α και Β τη χρονική στιγμή  $t=0$  απέχουν μεταξύ τους 400 m και κινούνται ευθύγραμμα ομαλά σε αντίθετη κατεύθυνση, ώστε να πλησιάζουν. Ο οδηγός του πρώτου αυτοκινήτου κορνάρει συνεχώς. Τη χρονική στιγμή  $t=10$  s τα αυτοκίνητα διασταυρώνονται και συνεχίζουν να κινούνται απομακρυνόμενα μεταξύ τους. Τη χρονική στιγμή της διασταύρωσής τους, ο οδηγός του δεύτερου αυτοκινήτου διαπιστώνει ότι ο ήχος που άκουγε αλλάζει απότομα και γίνεται βαρύτερος. Αν ο λόγος των συχνοτήτων που

ακούει ο οδηγός Β είναι  $\frac{209}{273}$  και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι  $v=300$  m/s να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα της πηγής (ταχύτητα του αυτοκινήτου Α).

β. Την ταχύτητα του παρατηρητή (ταχύτητα του αυτοκινήτου Β).

**(Απ.: 25 m/s ή 15 m/s, 15 m/s ή 25 m/s)**

**74.** Ένα διαπασών βρίσκεται μπροστά από κατακόρυφο τοίχο και παράγει ήχο συχνότητας 400 Hz. Το διαπασών αρχίζει να πλησιάζει προς τον τοίχο με ταχύτητα 1 m/s. Ο ήχος ανακλάται στον τοίχο και επιστρέφει πίσω.

α. Να δείξετε ότι ένας παρατηρητής ακίνητος, ο οποίος βρίσκεται πίσω από το διαπασών ακούει διακροτήματα.

β. Να υπολογίσετε την συχνότητα των διακροτημάτων αυτών.

Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι  $v=330$  m/s.

**(Απ.: 2,4 Hz)**

**75.** Αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με ταχύτητα μέτρου  $v_1=30$  m/s και πλησιάζει κάθετα έναν κατακόρυφο τοίχο. Ένας ποδηλάτης κινείται στην ίδια ευθεία με ταχύτητα μέτρου  $v_2=10$  m/s και απομακρύνεται από τον τοίχο πλησιάζοντας το αυτοκίνητο. Η σειρήνα του αυτοκινήτου εκπέμπει ήχο συχνότητας  $f_s=500$  Hz. Ποια είναι η συχνότητα του διακροτήματος που ακούει ο ποδηλάτης; Δίνεται ότι ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα μέτρου  $v=340$  m/s.

**(Απ.: 32 Hz)**

**76 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ).** Ένα τραίνο πλησιάζει έναν ακίνητο παρατηρητή με σταθερή ταχύτητα. Τη στιγμή που απέχει  $d=612$  m από τον παρατηρητή η σειρήνα του εκπέμπει ήχο συχνότητας  $f_s=400$  Hz επί χρονικό διάστημα  $\Delta t=3,4$  s. Ο παρατηρητής ακούει ήχο συχνότητας  $f_A=425$  Hz. Να υπολογίσετε:

α) Την ταχύτητα του τραίνου.

β) Το μήκος κύματος του ήχου που ακούει ο παρατηρητής.

γ) Το χρονικό διάστημα που ο παρατηρητής ακούει ήχο.

δ) Πόσο απέχει το τραίνο από τον παρατηρητή τη στιγμή που ο παρατηρητής παύει να ακούει τον ήχο;

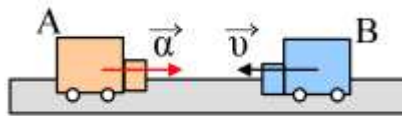
Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $v=340$  m/s.

**(Απ.: 20 m/s, 0,8 m, 3,2s, 512 m)**

77. Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα  $\vec{v}_1$  και η σειρήνα του εκπέμπει ήχο συχνότητας  $f_s$ . Κοντά στις σιδηροτροχιές, σε παράλληλη τροχιά, κινείται ένα αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα  $\vec{v}_2$  αντίρροπη της  $\vec{v}_1$ . Όταν το τρένο και το αυτοκίνητο πλησιάζουν, ο οδηγός του αυτοκινήτου αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας  $f_A$  με  $\frac{f_A}{f_s} = \frac{36}{31}$ , ενώ όταν το τρένο και το αυτοκίνητο απομακρύνονται, ο οδηγός του αυτοκινήτου αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας  $f'_A$  με  $\frac{f'_A}{f_s} = \frac{32}{37}$ . Αν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο  $u=340$  m/s, να βρείτε τις ταχύτητες του τρένου και του αυτοκινήτου.

(Απ.: 30 m/s, 20 m/s)

78 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Δύο φορτηγά A και B κινούνται αντίθετα όπως στο σχήμα.



Σε μια στιγμή  $t=0$ , απέχουν 150 m και το A έχει ταχύτητα 8 m/s και κινείται με σταθερή επιτάχυνση  $2 \text{ m/s}^2$ , ενώ το B έχει σταθερή ταχύτητα 20 m/s. Η σειρήνα του B φορτηγού εκπέμπει ήχο συχνότητας 1600 Hz. Αν η ταχύτητα του ήχου είναι 340 m/s, ποια η συχνότητα που ακούει ο οδηγός του A φορτηγού τις χρονικές στιγμές:

- i)  $t_1=1$  s και ii)  $t_2=6$  s

(Απ.: 1710 Hz, 1457,8 Hz)

79 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Αγωνιστικό αυτοκίνητο με σειρήνα κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα και πλησιάζει προς ακίνητο παρατηρητή. Η σειρήνα του αυτοκινήτου εκπέμπει ήχο συχνότητα  $f_s=900$  Hz για χρονικό διάστημα  $\Delta t=1,7$  s. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο της σειρήνας με συχνότητα  $f_A$  για διάστημα  $\Delta t_A=1,5$  s. Να υπολογίσετε:

- i) Τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής.
- ii) Την ταχύτητα του αυτοκινήτου.
- iii) Τη στιγμή  $t=0$  το αυτοκίνητο βρίσκεται στο ύψος του παρατηρητή και με τη σειρήνα του σε λειτουργία αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση  $\alpha=10 \text{ m/s}^2$ . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο που εκπέμπει η σειρήνα κάποια στιγμή  $t_1$  με συχνότητα  $f_1=850$  Hz.

- α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή  $t_1$ .
- β) Πόση συχνότητα αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής τη στιγμή  $t_2=4$  s;

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $u=340$  m/s.

(Απ.: 1020 Hz, 31 m/s, 2 s, 1,1 s, 872 Hz)

80 (ΑΓΙΑΝΝΙΩΤΑΚΗ-ΑΡΧΩΝ). Ένα τρένο εκπέμπει ήχο συχνότητας  $f_s$  και κατευθύνεται προς τούνελ που βρίσκεται σε κατακόρυφο βράχο, κινούμενο οριζόντια με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $u_s=20$  m/s. Το τρένο έχει προσπεράσει έναν ακίνητο παρατηρητή A που βρίσκεται πάνω στις σιδηροτροχιές. Ο ήχος που εκπέμπεται από το τρένο ανακλάται στον βράχο και η συχνότητα του ανακλώμενου ήχου που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός του τρένου είναι  $f_1=1800$  Hz.

A. Να υπολογίσετε:

1. τη συχνότητα  $f_s$  του ήχου που εκπέμπει το τρένο,
2. τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής A απευθείας από το τρένο,

3. τη συχνότητα του ανακλώμενου ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α,  
4. το μήκος κύματος του ανακλώμενου ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α  
B. Πως τροποποιούνται οι απαντήσεις στα ερωτήματα 2, 3 και 4 αν ο παρατηρητής Α βρίσκεται μεταξύ τρένου και βράχου, δηλαδή αν δεν τον έχει προσπεράσει το τρένο;  
Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα  $v=340$  m/s.  
(Απ.: 1600 Hz, 1511,1 Hz, 1700 Hz, 0,2 m, .....)

**81 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ).** Δύο σειρήνες  $S_1$  και  $S_2$  που ηχούν ταυτόχρονα βρίσκονται ακίνητες σε αρκετή απόσταση μεταξύ τους. Η σειρήνα  $S_1$  εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητας  $f_1=680$  Hz, ενώ η  $S_2$  εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητα  $f_2$ . Ένας παρατηρητής Α που κινείται από τη σειρήνα  $S_1$  προς τη σειρήνα  $S_2$  με σταθερή ταχύτητα  $v_A=2$  m/s, αντιλαμβάνεται διακρότημα με συχνότητα  $f_δ=8$  Hz. Να υπολογίσετε:

- α) Τη συχνότητα με την οποία ο παρατηρητής Α αντιλαμβάνεται τον ήχο που προέρχεται από τη σειρήνα  $S_1$ .
  - β) Τη συχνότητα με την οποία ο παρατηρητής Α αντιλαμβάνεται τον ήχο που προέρχεται από τη σειρήνα  $S_2$ .
  - γ) Τη συχνότητα  $f_2$  που εκπέμπει η σειρήνα  $S_2$ .
  - δ) Τον αριθμό των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το τύμπανο του αυτιού του παρατηρητή Α, σε χρόνο ίσο με μια περίοδο του διακροτήματος.
- Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $v=340$ m/s.

(Απ.: .....)

**82 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ).** Ένα περιπολικό με την σειρήνα του σε λειτουργία κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα, ανάμεσα σε δύο ακίνητους παρατηρητές Α και Β, οι οποίοι απέχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Ο Α παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας  $f_A=612$  Hz, ενώ ο Β αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας  $f_B=544$  Hz.

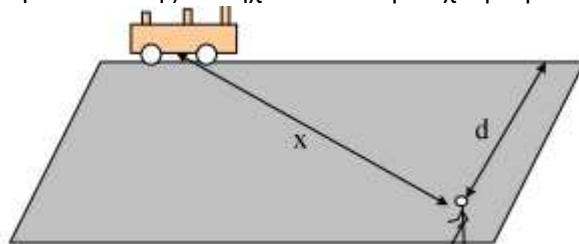
- α) Το περιπολικό κινείται προς τον παρατηρητή Α ή προς τον Β; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας και να υπολογίσετε την ταχύτητα του περιπολικού.
  - β) Ποια συχνότητα εκπέμπει η σειρήνα του περιπολικού;
  - γ) Ποιο το μήκος κύματος που ο κάθε παρατηρητής αντιλαμβάνεται;
  - δ) Αν ο Α παρατηρητής διαθέτει αυτοκίνητο, με ποια σταθερή ταχύτητα και προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί, ώστε να ακούει ίδια συχνότητα με τον παρατηρητή Β;
- Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $v=340$ m/s.

(Απ.: .....)

**83 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ).** Ο ακίνητος παρατηρητής Α απέχει από τις γραμμές του τρένου απόσταση  $d=60$  m. Όταν το τρένο βρίσκεται σε απόσταση  $x=100$  m από τον παρατηρητή, ηχεί η σειρήνα του εκπέμποντας ήχο συχνότητας  $f_s=500$  Hz για χρόνο  $\Delta t_s=1$  s. Αν το τρένο κινείται με ταχύτητα μέτρου  $v_s=20$  m/s, να βρείτε:

- α. Τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.
- β. Τη διάρκεια του ήχου της σειρήνας που ακούει ο παρατηρητής.
- γ. Το μήκος κύματος που "αντιλαμβάνεται" ο παρατηρητής.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα έχει μέτρο  $v=340$  m/s.



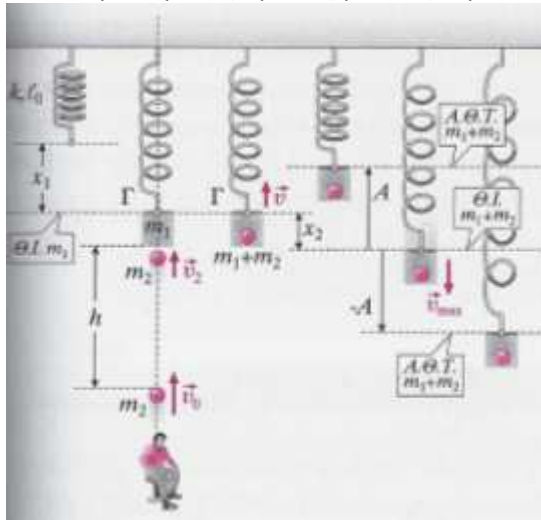
(Απ.: 524,7 Hz, 0,95 s, 0,648 m)

**Ε. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**84.** Στην οροφή ερευνητικού εργαστηρίου είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς  $k=60 \text{ N/m}$ , στο άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σώμα  $\Sigma_1$  με μάζα  $m_1=17 \text{ kg}$ . Το σύστημα ισορροπεί, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα  $y'y'$  που ορίζει ο άξονας του ελατηρίου. Ο παρατηρητής εκτοξεύει κατακόρυφα προς τα πάνω σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2=3 \text{ kg}$  με ταχύτητα μέτρου  $u_0=12 \text{ m/s}$ . Το σημείο εκτόξευσης απέχει απόσταση  $h=2,2 \text{ m}$  από το σώμα  $\Sigma_1$ . Το σώμα  $\Sigma_2$  έχει ενσωματωμένη σειρήνα που εκπέμπει συνεχώς ήχο συχνότητας  $f_s=700 \text{ Hz}$ .

α. Να υπολογίσετε την συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής λίγο πριν την κρούση του σώματος  $\Sigma_2$  με το  $\Sigma_1$ .

β. Η κρούση που επακολουθεί είναι πλαστική και γίνεται με τρόπο ακαριαίο. Να βρεθεί η σχέση που περιγράφει την απομάκρυνση  $x$  της ταλάντωσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Για την περιγραφή αυτή θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ( $t=0$ ) τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά του άξονα των απομακρύνσεων τη φορά της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



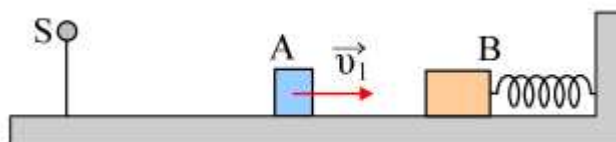
γ. Η σειρήνα δεν καταστρέφεται κατά την κρούση. Να βρεθεί η σχέση που δίνει τη συχνότητα  $f_A$  την οποία αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε συνάρτηση με το χρόνο μετά την κρούση.

δ. Να βρεθεί ο λόγος της μέγιστης συχνότητας  $f_{A,max}$  προς την ελάχιστη συχνότητα  $f_{A,min}$  που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα  $u_{\eta\chi}=340 \text{ m/s}$  και  $g=10 \text{ m/s}^2$ .

(Απ.:  $680 \text{ Hz}$ ,  $x=1.\eta\mu(\sqrt{3}.t + \pi/6)$  (S.I.),  $\frac{340.700}{340 + \sqrt{3}.\sigma\upsilon\nu(\sqrt{3}.t + \pi/6)} \text{ Hz}$ ,  $\frac{340 + \sqrt{3}}{340 - \sqrt{3}}$ )

**85 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ).** Ακίνητη πηγή ήχου  $S$  βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα και παράγει αρμονικό ήχο συχνότητας  $f_s=1700 \text{ Hz}$ .



Σώμα  $A$  μάζας  $m_1=1 \text{ kg}$  κινείται στο ίδιο επίπεδο με ταχύτητα  $u_1$  και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο σώμα  $B$  μάζας  $m_2=6 \text{ kg}$ . Το σώμα  $B$  είναι προσδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $K=600 \text{ N/m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Τη στιγμή της σύγκρουσης, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και ο

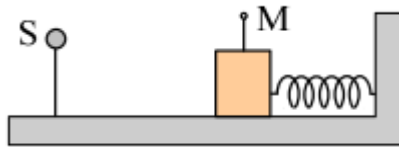
άξονάς του συμπίπτει με τη διεύθυνση της κίνησης του σώματος Α. Το σώμα Α φέρει συσκευή ανίχνευσης ηχητικών κυμάτων. Η συχνότητα του ήχου που ανιχνεύει η συσκευή πριν την κρούση είναι  $f=1620$  Hz, ενώ μετά την κρούση είναι  $f'=1740$  Hz.

- Να βρείτε την ταχύτητα  $u_1$  του σώματος Α.
- Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση και να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Α μετά την κρούση.
- Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Β μετά την κρούση.
- Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της ορμής του σώματος Β μετά από χρόνο  $t=(\pi/15)$  sec από τη στιγμή που αυτό άρχισε να κινείται.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $u=340$  m/s.

(Απ.: 16 m/s, 8 m/s, 0,4 m, -12 kg.m/s)

**86 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ).** Ένα σώμα Σ μάζας 2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος  $A=0,5$  m σε οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο οριζώντιου ελατηρίου όπως στο σχήμα, σταθεράς  $k=3200$  N/m. Στο σώμα Σ προσκολλάται ένα μικρόφωνο. Στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου υπάρχει ηχητική πηγή που παράγει αρμονικό ήχο συχνότητας  $f_s=680$  Hz.

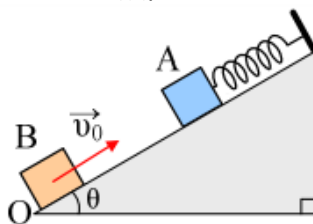


- Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη συχνότητα του ήχου που καταγράφεται από το μικρόφωνο;
- Αν για  $t=0$  το σώμα Σ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, να δώσετε την εξίσωση της συχνότητας του ήχου που καταγράφει το μικρόφωνο σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου  $u=340$  m/s.

(Απ.: .....)

**87 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ).** Πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσεως  $\theta=30^\circ$ , ισορροπεί ένα σώμα Α μάζας 1 kg δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς  $k=100$  N/m, όπως στο σχήμα. Από την βάση Ο του κεκλιμένου επιπέδου εκτοξεύεται ένα δεύτερο σώμα Β με ταχύτητα  $u_0=5$  m/s, το οποίο αφού μετακινηθεί κατά  $s=0,9$  m συγκρούεται μετωπικά με το σώμα Α, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



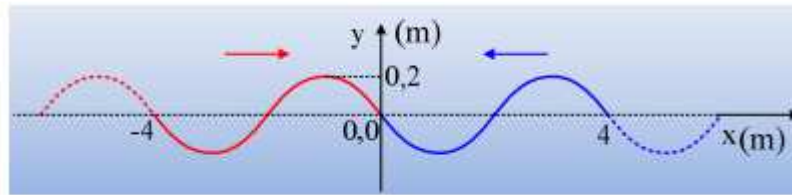
Μετά την κρούση, το σώμα Α κινείται προς τα πάνω και φτάνει μέχρι τη θέση που το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος, όπου και σταματά στιγμιαία, ενώ το σώμα Β επιστρέφει στο σημείο Ο με ταχύτητα 3 m/s.

- Ποια είναι η αρχική επιμήκυνση και η δυναμική ενέργειά του ελατηρίου;
- Πόση είναι η ταχύτητα του Β σώματος πριν την κρούση και του σώματος Α αμέσως μετά την κρούση;
- Να βρεθεί η μάζα του σώματος Β.
- Η παραπάνω κρούση ήταν ελαστική; Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g=10$  m/s<sup>2</sup>.

(Απ.: .....)



**88 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα με το ίδιο πλάτος  $A=0,2$  m και το ίδιο μήκος κύματος  $\lambda=4$  m και την στιγμή  $t=0$  τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε ένα σημείο  $O$ , το οποίο θεωρούμε αρχή του άξονα ( $x=0$ ). Η μορφή του μέσου τη στιγμή αυτή, εμφανίζεται στο παραπάνω σχήμα. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα  $u=2$  m/s.



- Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές  $t_1=2$  s και  $t_2=3$  s και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί το στάσιμο κύμα, στο ίδιο διάγραμμα.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που ασκείται σε μία σημειακή μάζα  $\Sigma$ , μάζας  $m=1$  mg, η οποία βρίσκεται στη θέση  $x_1=3$  m, σε συνάρτηση με τον χρόνο.

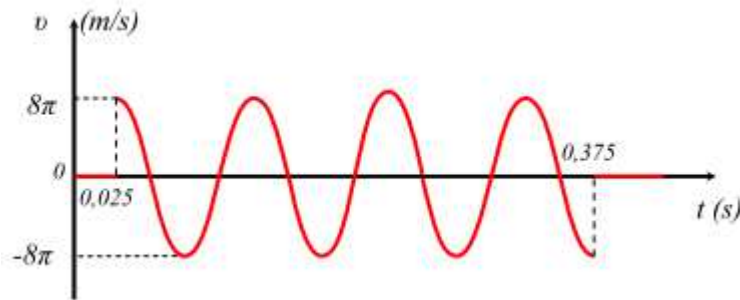
(Απ.:  $y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t - \frac{\pi x}{2})$  x ≤ 2.t (S.I.) και  $y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi x}{2} + \pi)$  x ≥ -2.t (S.I.) ,

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}) \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ για } -2.t \leq x \leq 2.t \text{ (S.I.)}$$

**89 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Δύο σύγχρονες πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  που απέχουν απόσταση  $d=8$  m, παράγουν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα που έχουν ταχύτητα διάδοσης  $u=20$  m/s. Η εξίσωση της απομάκρυνσης των πηγών σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση  $y=0,4 \cdot \eta\mu 20\pi t$  (S.I.).

- Σε ένα σημείο  $\Sigma$  της επιφάνειας του υγρού που απέχει απόσταση  $r_1=4$  m από την πηγή  $\Pi_1$  και απόσταση  $r_2$  από την πηγή  $\Pi_2$  με  $r_2 > r_1$ , τα δύο κύματα φτάνουν με χρονική καθυστέρηση  $\Delta t=0,2$  s.
  - Να διερευνήσετε αν στο σημείο  $\Sigma$  έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
  - Να βρεθεί η απόσταση  $r_2$ .
  - Να βρεθεί η υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης στην οποία βρίσκεται το σημείο  $\Sigma$
  - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$ .
  - Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του  $\Sigma$  τη χρονική στιγμή  $t=0,45$  s.
  - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$  αν θεωρήσουμε ότι η στοιχειώδης μάζα του υλικού σημείου  $\Sigma$  είναι  $m=5 \cdot 10^{-3}$  kg.
  - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο για  $t \geq 0$ .

2. Για ένα σημείο  $P$  που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$  και απέχει  $x_1$  και  $x_2$  ( $x_1 > x_2$ ) από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



- α. Να διερευνήσετε αν στο σημείο P έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.  
β. Να βρεθούν οι αποστάσεις  $x_1$  και  $x_2$ . Σε ποια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης βρίσκεται το σημείο P;  
γ. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο για το κάθε κύμα ξεχωριστά. Ποια αρχή επιβεβαιώνεται από τις γραφικές παραστάσεις;

3. Να βρείτε ποια σημεία μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$  και ποια σημεία μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου P, αν θεωρήσουμε ότι όλα τα υλικά σημεία μεταξύ των πηγών έχουν την ίδια στοιχειώδη μάζα με το  $\Sigma$ .

4. Να σχεδιάσετε τις υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης μεταξύ των πηγών  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ .

5. Να βρείτε τη διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές για ένα σημείο Λ που ανήκει στην 2<sup>η</sup> υπερβολή αποσβεστικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του  $\Pi_1\Pi_2$ .

6. Ένα σημείο K της επιφάνειας του υγρού που ανήκει στην 5<sup>η</sup> υπερβολή ενισχυτικής συμβολής δεξιά της υπερβολής του  $\Sigma$ , μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό ταλαντώνεται με εξίσωση  $y=0,8\eta\mu(20\pi t-5\pi)$  (S.I.). Να βρείτε τις αποστάσεις  $d_1$  και  $d_2$  του σημείου K από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ . Δίνεται  $\pi^2\approx 10$ .

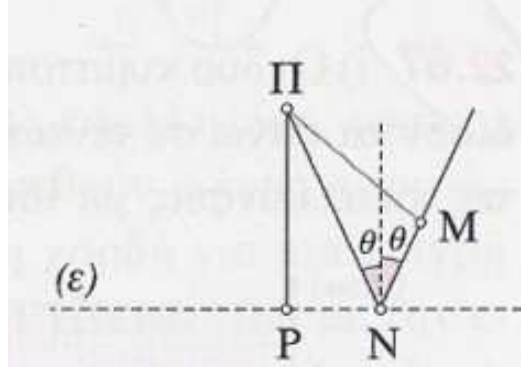
(Απ.: ενίσχυση, 8 m, N=-2, -16π m/s, απόσβεση, 0,5 m, 0,7 m, N=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 3 m, 3 m, 9 m)

**90 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ).** Δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  απέχουν μεταξύ τους κατά  $d=4$  m και εκπέμπουν αρμονικά κύματα πλάτους A και μήκους κύματος  $\lambda=2$  m που διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο. Σημείο M βρίσκεται στο ελαστικό μέσο και απέχει από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αποστάσεις  $r_1$  και  $r_2$  αντίστοιχα.

- α. Γιατί δεν μπορεί να ισχύει  $|r_1 - r_2| > d$ .  
β. Αν για το M ισχύει  $r_1 - r_2 = (2/3)$  m, να βρείτε το πλάτος ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.  
γ. Τι τιμές μπορεί να πάρει η διαφορά  $r_1 - r_2$  για τα σημεία τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος  $A' = A\sqrt{2}$ ; Τι μορφής καμπύλη είναι ο γεωμετρικός τρόπος των σημείων αυτών;  
δ. Να βρείτε τον αριθμό των υπερβολών ενισχυτικής συμβολής και τον αριθμό των υπερβολών αποσβεστικής συμβολής μεταξύ των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ .

(Απ.: A,  $r_1 - r_2 = k\lambda \pm \lambda/4$ , 3, 4)

**91 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ).** Μια πηγή παραγωγής αρμονικών κυμάτων  $\Pi$  βρίσκεται στην επιφάνεια υγρού και εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση  $y=0,02\eta\mu(20\pi t)$  (S.I.). Το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούνται είναι  $\lambda=1$  m. Σε απόσταση 2,1 m από την πηγή υπάρχει κατακόρυφη επιφάνεια ( $\epsilon$ ) στην οποία, αφού χτυπήσουν τα κύματα, ανακλώνται. Ένα σημείο M της επιφάνειας του υγρού που απέχει από την πηγή ( $\Pi M$ )=2,2 m βρίσκεται στην πιο απομακρυσμένη από την πηγή υπερβολή ενισχυτικής συμβολής.



α. Να βρείτε το μήκος της διαδρομής ΠΝΜ που ακολουθεί το κύμα, το οποίο, αφού ανακλαστεί στην κατακόρυφη επιφάνεια, φτάνει στο M.

β. Πόσες υπερβολές ενισχυτικής συμβολής υπάρχουν μεταξύ της πηγής Π και της κατακόρυφης επιφάνειας.

γ. Πόση είναι η μικρότερη απόσταση από την πηγή Π της πλησιέστερης στην πηγή υπερβολής ενισχυτικής συμβολής.

**(Απ.: 3,2 m, 4 υπερβολές, 0,1 m)**

**92.** Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος A, μήκος κύματος 0,5 m και συχνότητα 2 Hz διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x'Οx. Τα κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση O ( $x=0$ ) της χορδής εμφανίζει κοιλία. Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου ισούται με 2 cm.

1. Να γράψετε την εξίσωση του δημιουργούμενου στάσιμου κύματος.

2. Να βρείτε τη θέση του 6<sup>ου</sup> δεσμού.

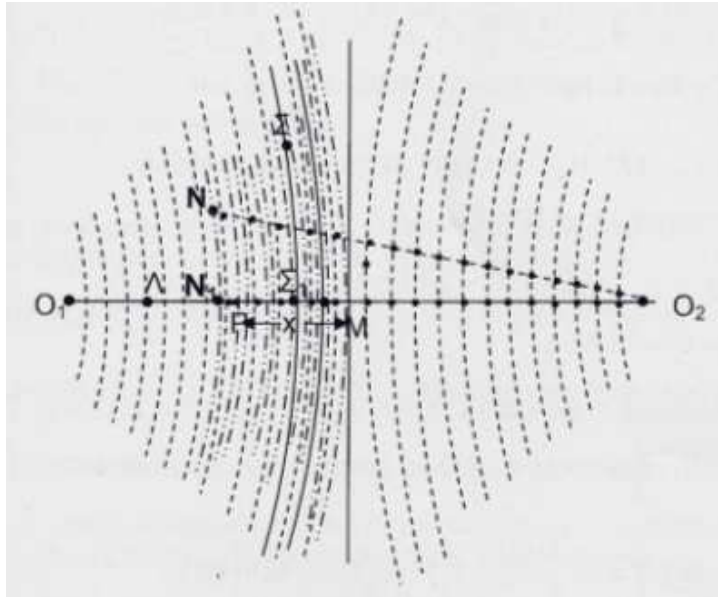
3. Αν Δ υλικό σημείο της χορδής στη θέση  $x_{\Delta}=(1/12)$  m με μάζα 3 g, να υπολογίσετε τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς που δέχεται το Δ κατά την ταλάντωσή του.

4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου A ( $x_A=4/3$  m) τη στιγμή που το σημείο B ( $x_B=7/3$  m) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Δίνεται  $\pi^2 \approx 10$  και  $\sin(\pi/3)=1/2$ .

**(Απ.:  $y = 0,02\sigma\upsilon\upsilon\eta(4\pi x)\cdot\eta\mu(4\pi t)$  (S.I.), 1,375 m, 0,0024 N, 0,04π m/s )**

**93 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ).** Δύο σύγχρονες πηγές  $O_1$  και  $O_2$  που απέχουν απόσταση  $d=24$  cm, αρχίζουν να εκτελούν Α.Α.Τ. τη χρονική στιγμή  $t=0$  (όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα) με εξισώσεις  $y_1=y_2=A\eta\mu\omega t$  ( $y$  σε cm,  $t$  σε sec) αντίστοιχα και δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια νερού που ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή  $t_1=1,175$  sec στα σημεία Σ και Ν που βρίσκονται στην επιφάνεια του νερού και αριστερά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος  $O_1O_2$ , έχει φτάσει μόνο το κύμα που δημιουργεί η πηγή  $O_1$ . Η φάση του σημείου Σ τη χρονική στιγμή  $t_1$  είναι  $\phi_2=3\pi$  rad. Την ίδια χρονική στιγμή η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Σ και Ν είναι  $\Delta\phi=9\pi/2$  rad. Εάν οι αποστάσεις που απέχει το σημείο Σ από τις πηγές  $O_1$  και  $O_2$  είναι  $(O_1\Sigma)=r_1=20,5$  cm και  $(O_2\Sigma)=r_2=24,5$  cm αντίστοιχα και η απόσταση του σημείου Ν από την πηγή  $O_1$  είναι  $(O_1N)=r_1'=16$  cm, να υπολογιστούν:



α. Το μήκος κύματος  $\lambda$  των παραγόμενων από τις πηγές  $O_1$  και  $O_2$  κυμάτων, καθώς και την περίοδό τους  $T$ .

β. Την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του νερού.

γ. Εάν μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στα σημεία  $\Sigma$  και  $N$ , το σημείο  $N$  βρίσκεται πάνω σε υπερβολή αριστερά της μεσοκαθέτου του τμήματος  $O_1O_2$  και ταλαντώνεται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με το μισό της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$ , να βρεθεί μία παραμετρική συνθήκη που να συνδέει τις αποστάσεις  $r_1'$  και  $r_2'$  από τις πηγές  $O_1$  και  $O_2$  των σημείων της επιφάνειας του νερού που βρίσκονται μεταξύ των δύο πηγών και ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το σημείο  $N$ . Εάν το  $N$  βρίσκεται πάνω στην υπερβολή που αντιστοιχεί στην τιμή  $9$  της παραμέτρου, να βρεθεί η απόσταση  $(O_2N)$ .

δ. Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων, να υπολογιστεί το πλήθος των υπερβολών μεταξύ των σημείων  $\Sigma$  και  $N$  που ταλαντώνονται με πλάτος ίδιο με αυτό του σημείου  $N$ .

ε. Να υπολογιστεί το πλήθος των σημείων της επιφάνειας του νερού που βρίσκονται στην ευθεία  $O_2N$  και παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των κυμάτων.

στ. Να γίνει η γραφική παράσταση της διαφοράς της φάσης  $\Delta\phi$  μεταξύ των σημείων  $N$  και  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$ . Να θεωρήσετε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας του νερού έχουν την ίδια μάζα και ότι τα κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού χωρίς απώλειες ενέργειας.

(Απ.:  $2 \text{ cm}$ ,  $0,1 \text{ s}$ ,  $0,2 \text{ m/s}$ ,  $|r_1' - r_2'| = (2 \cdot N + 1) \cdot \frac{1}{2}$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots, 25,5 \text{ cm}$ ,  $5$  υπερβολές,  $17$ )

**94.** Σε δύο σημεία  $K$  και  $\Lambda$  της ήρεμης επιφάνειας υγρού δημιουργούνται τη χρονική στιγμή  $t=0$  ταυτόχρονα δύο σύγχρονες πηγές ( $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα) αρμονικών κυμάτων πλάτους  $A=5 \text{ cm}$  και συχνότητας  $f=5 \text{ Hz}$ . Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι  $u=2 \text{ m/s}$ . Αν  $\sigma'$  ένα σημείο  $M$  της επιφάνειας του υγρού, που απέχει από τις πηγές αποστάσεις αντίστοιχα  $(MK)=d_1=1,6 \text{ m}$  και  $(M\Lambda)=d_2=1,2 \text{ m}$ , υπάρχει μικρός φελλός, να βρείτε:

1. Ποια χρονική στιγμή αρχίζει να κινείται ο φελλός;
2. Την εξίσωση που μας δίνει την απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του για  $t>0$ .
3. Αν οι πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  απέχουν μεταξύ τους  $1\text{m}$  πόσα σημεία ενίσχυσης υπάρχουν μεταξύ των σημείων  $K$  και  $\Lambda$ ;

(Απ.:  $0,6 \text{ sec}$ ,  $y = 0$  για  $0 \leq t \leq 0,6\text{s}$ ,  $y = y_2 = 0,05 \cdot \eta\mu(10\pi t - 6\pi)$  (S.I.) με  $0,6\text{s} \leq t \leq 0,8\text{s}$ ,

$y = 0,1 \cdot \eta\mu(10\pi t - 6\pi)$  (S.I.) για  $0,8\text{s} \leq t$ ,  $5$  σημεία)