ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Α. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

1. Δύο αμαξίδια με μάζες m_1=1 kg και m_2=1,5 kg συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά, έχοντας τη στιγμή της σύγκρουσης το καθένα ταχύτητα 4 m/s, αντίθετης κατεύθυνσης. Να βρείτε την ταχύτητα που έχει κάθε αμαξίδιο αμέσως μετά την κρούση.
(Απ.: 5,6 m/s και 2,4 m/s αντίθετης κατεύθυνσης)

2. Μια ελαστική σφαίρα, μάζας m_1=2 kg, συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με άλλη σφαίρα, μάζας m_2=1 kg, η οποία κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_2$=2 m/s, αντίρροπα με την πρώτη. Πόση πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα της πρώτης σφαίρας, ώστε η δεύτερη σφαίρα, μετά την κρούση, να έχει ταχύτητα μηδέν;
(Απ.: -0,5 m/s)

3. Σφαίρα Α βρίσκεται ανάμεσα σε δύο σφαίρες Β και Γ με μάζες m_B=$m_Γ$=3m_A αντίστοιχα. Στη σφαίρα Α δίνουμε ταχύτητα $\vec{υ}_o$. Πόση είναι η ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση της με την Γ, αν όλες οι κρούσεις είναι κεντρικές και ελαστικές;
(Απ.: $υ_o$/4 προς τα δεξιά)

4. Δύο σφαίρες αμελητέων ακτίνων με μάζες m_1 και m_2 όπου m_1=4.m_2, αφήνονται διαδοχικά να πέσουν από το ίδιο ύψος h_1=18 m σε οριζόντιο επίπεδο. Οι σφαίρες κινούνται πάνω στην ίδια κατακόρυφο. Αφήνεται πρώτα η σφαίρα μάζας m_1 και μετά η σφαίρα μάζας m_2. Η σφαίρα μάζας m_1 προσκρούει στο οριζόντιο επίπεδο και αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Μόλις αποχωριστεί από το επίπεδο, συγκρούεται μετωπικά με την κατερχόμενη σφαίρα μάζας m_2. Να βρεθεί το ύψος h_2 στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα μάζας m_2. Να θεωρηθεί ότι όταν οι σφαίρες συγκρούονται, έχουν διανύσει την ίδια κατακόρυφη απόσταση h_1 από το σημείο εκκίνησης. (Όλες οι κρούσεις είναι απολύτως ελαστικές και η αντίσταση του αέρα αμελητέα). Δίνεται g=10 m/s^2. **(Πανελλαδικές 1990)**
(Απ.: 87,12 m)

5. Μια μπάλα μάζας m_1=1 kg κινείται στο οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με δεύτερη μπάλα μάζας m_2 που είναι ακίνητη πάνω στο δάπεδο. Αν η ταχύτητα της δεύτερης μπάλας, αμέσως μετά την κρούση, είναι ίση με τα 2/5 της ταχύτητας που είχε η πρώτη μπάλα πριν την κρούση, να υπολογίσετε:

α. Τη μάζα m_2 της δεύτερης μπάλας.

β. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε στη δεύτερη μπάλα κατά την κρούση.

(Απ.: 4 kg, 64%)

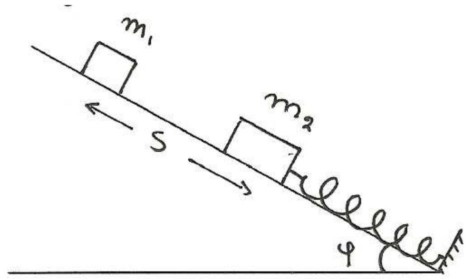
6. Το σώμα μάζας m_2=3 kg του ακόλουθου σχήματος ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο δεμένο στο ελεύθερο άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=3000 N/m. Από απόσταση s=4 m πάνω από το σώμα μάζας m_2 αφήνεται σώμα μάζας m_1=1 kg να ολισθήσει στο λείο κεκλιμένο επίπεδο, το οποίο έχει γωνία κλίσης φ=30^o. Το σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα μάζας m_2. Να βρείτε:

i) την ταχύτητα του σώματος m_1 πριν και μετά την κρούση,

ii) τη ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

iii) το πλάτος, την περίοδο και την ενέργεια ταλάντωσης του σώματος μάζας m_2, <u>(το ερώτημα αυτό να απαντηθεί αφού έχει αντιμετωπιστεί το κεφάλαιο της Α.Α.Τ.)</u>

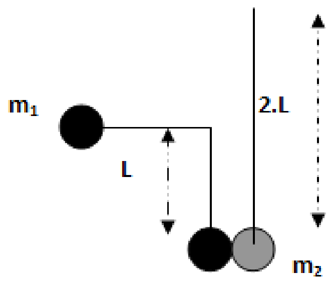
Δίνεται g=10 m/s^2.



(Απ.: $-\sqrt{10}$**m/s, 15 J, 0,1 m,** $\frac{2\pi\sqrt{10}}{100}$**s ,** $\frac{\sqrt{399}}{40}$**m/s)**

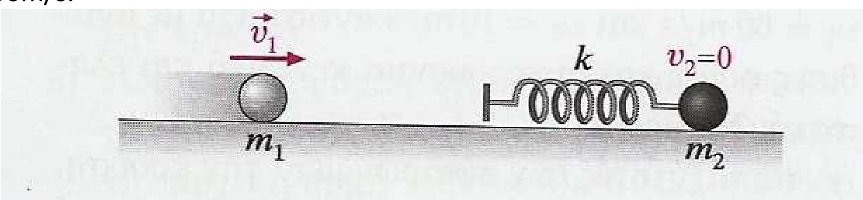
7. Δύο σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα είναι κρεμασμένες από δύο νήματα με μήκη αντίστοιχα L και 2L, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Εκτρέπουμε τη σφαίρα $Σ_1$ κατά 90^o και την αφήνουμε ελεύθερη. Αν η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική, να βρείτε τα μέγιστα ύψη στα οποία ανεβαίνουν οι σφαίρες μετά την κρούση όταν η σχέση μεταξύ των μαζών τους είναι:

α. $m_1=m_2$ β. $m_1=2.m_2$ γ. $m_1=m_2/2$



(Απ.: 0 και L, $\frac{L}{9}$ **και** $\frac{16.L}{9}$**,** $\frac{L}{9}$ **και** $\frac{4.L}{9}$ **)**

8* (Σαββάλας). Στη σφαίρα μάζας m_2=3kg είναι δεμένο ελατήριο σταθεράς k=12000N/m. Σφαίρα μάζας m_1=2 kg κινείται προς τη σφαίρα μάζας m_2 με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=50m/s.



i) Κατά τη διάρκεια της επαφής της σφαίρας μάζας m_1 με το ελατήριο να συγκρίνεται τις δυνάμεις που δέχονται οι σφαίρες και τους ρυθμούς μεταβολής των ταχυτήτων τους.

ii) Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου και ποιοι οι ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητας εκείνη την χρονική στιγμή;

iii) Να βρείτε τις τελικές ταχύτητες των σφαιρών.

(Απ.: 0,5 m, -3000 m/s^2, 2000 m/s^2 ,-10 m/s, 40 m/s)

9. Σφαίρα μάζας m_1=4 kg δένεται από το ελεύθερο άκρο σχοινιού μήκους L=1 m. Εκτρέπουμε τη σφαίρα από την κατακόρυφη διεύθυνση κατά γωνία φ=60^o και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν η σφαίρα περνά από την κατώτερη θέση της, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_2=1 kg. Να βρείτε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μάζας m_2 πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.
Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου μ=0,2 και g=10 m/s^2.
(Απ.: 6,4 m)

10 (YLIKONET). Μια σφαίρα Α με μάζα m_1=1 kg κινείται με ταχύτητα $υ_1$=10 m/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με μια άλλη σφαίρα Β μάζας m που αρχικά είναι ακίνητη.

α. Να βρεθεί το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α που μεταφέρεται στην σφαίρα Β σε συνάρτηση με τη μάζα της σφαίρας Β.

β. Σε ποιες περιπτώσεις το ποσοστό αυτό γίνεται μέγιστο και σε ποιες ελάχιστο;

(Απ.: $\frac{\mathbf{400.m}}{(\mathbf{1+m})^2}$ **)**

11 (YLIKONET). Ένα σώμα Α μάζας m_1=2 kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_1$=10 m/s και προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k=750 N/m και φυσικού μήκους 0,5 m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακίνητο αρχικά σώμα Β μάζας m_2=3 kg. Ζητούνται:

α. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων.

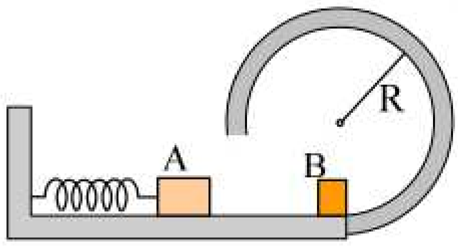
β. Η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά το σώμα Β.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Β, την στιγμή που έχει μέγιστη επιτάχυνση.

δ. Οι τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων.

(Απ.: 0,1 m, 100 m/s^2, 1200 J/s, -2 m/s, 8 m/s)

12 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Για να βρούμε τη σταθερά ενός ελατηρίου, πραγματοποιούμε το εξής πείραμα. Στο άκρο του ελατηρίου δένουμε σώμα Α μάζας m_1=4 kg και στη βάση της κατακόρυφης κοίλης κυλινδρικής επιφάνειας εσωτερικής ακτίνας R=0,5 m τοποθετούμε σώμα Β μάζας m_2=1 kg.

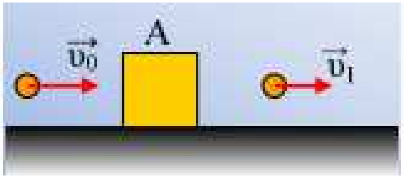


Το σώμα Α, μόλις το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα Β. Παρατηρούμε ότι για συμπίεση του ελατηρίου κατά 0,5 m το σώμα Β μόλις εκτελεί ανακύκλωση. Αν οι διαστάσεις του σώματος Β, θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με την ακτίνα της κυλινδρικής επιφάνειας, ποια η τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.
(Απ.: 156,25 N/m)

Β. ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

13. Ένα χελιδόνι έχει μάζα m_1=30 g και κινείται με οριζόντια ταχύτητα $υ_1$=54 km/h. Κάποια στιγμή το χελιδόνι καταπίνει ένα έντομο μάζας m_2=5 g, που κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση με το χελιδόνι, έχοντας ταχύτητα $υ_2$=10 m/s. Ποια είναι η ταχύτητα του χελιδονιού μετά το γεύμα;
(Απ.: 11,43 m/s)

14 (YLIKONET). Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί σώμα Α μάζας Μ=2 kg. Ένα βλήμα μάζας m=0,1 kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_o$=100 m/s, συγκρούεται με το σώμα Α, το διαπερνά σε χρόνο Δt=0,2 sec και εξέρχεται με ταχύτητα $υ_1$=20 m/s.



α. Να βρείτε την αρχική ορμή του βλήματος.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Α μετά την κρούση.

γ. Ποια είναι η μεταβολή της ορμής του βλήματος;

δ. Βρείτε τη μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα κατά το πέρασμά του μέσα από το σώμα Α.

ε. Σε μία στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α είναι 50 kg.m/s^2, ποιος είναι αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή;

στ. Αν το σώμα παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστή τριβή ολίσθησης μ=0,2, πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα Α, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει;
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.
(Απ.: 10 kg.m/s, 4 m/s, -8 kg.m/s, -40 N, -50 kg.m/s^2, 4 m)

15. Αυτοκίνητο μάζας m_1=5000 kg κινείται σε κεντρικό δρόμο με ταχύτητα $υ_1$=10 m/s. Σε μία διασταύρωση το αυτοκίνητο συγκρούεται πλαστικά με άλλο αυτοκίνητο μάζας m_2=2000 kg, που μπήκε στον κεντρικό δρόμο, με ταχύτητα $υ_2$=25 m/s κάθετη στην ταχύτητα $υ_1$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος των δύο αυτοκινήτων αμέσως μετά την σύγκρουση.
(Απ.: 10,1 m/s, 45^o)

16. Δύο σώματα με μάζες m_1=15 g και m_2=20 g συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά έχοντας αμέσως πριν την κρούση ταχύτητες $υ_1$=1 m/s και $υ_2$=0,5 m/s αντίθετης κατεύθυνσεις αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β. Την μηχανική ενέργεια του συστήματος η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω της κρούσης.
(Απ.: (1/7) m/s, 9,64.10^{-3} J)

17. Δύο σώματα με μάζες m_1=300 g και m_2=200 g κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες $υ_1$=50 cm/s και $υ_2$=100 cm/s αντίστοιχα. Τα σώματα κινούνται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια και συγκρούονται μετωπικά.

α. Αν η σύγκρουση είναι πλαστική να βρεθεί η κοινή ταχύτητα μετά την κρούση.

β. Να βρεθεί η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

γ. Αν η κρούση είναι ελαστική, ποια είναι η ταχύτητα του κάθε σώματος αμέσως μετά την κρούση;
(Απ.: 10 cm/s, 0,134 J, 70 cm/s-80 cm/s)

18. Ένα σώμα μάζας m_1=5 kg είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Ένα άλλο σώμα με μάζα m_2=8 kg, που κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται με το πρώτο έχοντας τη στιγμή της σύγκρουσης ταχύτητα $υ_2$. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει διανύει στο οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0,04, διάστημα 0,7 m μέχρι να σταματήσει. Να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα $υ_2$.

β. Το ποσοστό της ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση. Τι συμπεραίνετε; Δίνεται g=10 m/s^2.

(Απ.: 1,216 m/s, 38,46%)

19. Ένα βλήμα μάζας m_1=0,1 kg προσπίπτει σε ακίνητο σώμα μάζας m_2=2 kg, που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο, με οριζόντια ταχύτητα $υ_1$=500 m/s και εξέρχεται από αυτό με ταχύτητα $υ_1'$=300 m/s. Αν δίνεται g=10 m/s^2 και ότι το αρχικά ακίνητο σώμα κινείται διανύοντας διάστημα 20 m μέχρι να σταματήσει, να υπολογίσετε:

α. Τον συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το οριζόντιο δάπεδο.

β. Τη ΄΄χαμένη΄΄, κατά την κρούση, μηχανική ενέργεια του συστήματος.

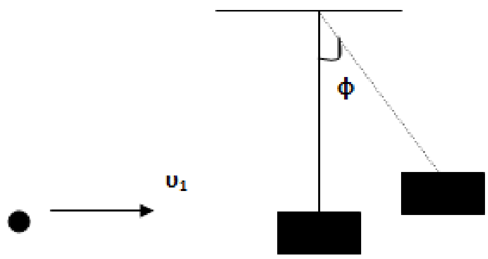
(Απ.: 0,25, 7900 J)

20. Ένα κομμάτι ξύλο μάζας 2 kg είναι δεμένο με νήμα μήκους 1 m, σε ένα ακλόνητο σημείο και ισορροπεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας 10 g κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$ και σφηνώνεται στο κέντρο του ξύλου προκαλώντας έτσι ανύψωση του κατά h=10 cm. Δίνεται g=9,8 m/s^2.

α. Πόση είναι η ταχύτητα $υ_1$;

β. Πόση είναι η απώλεια της ενέργειας του συστήματος ξύλο-βλήμα κατά την κρούση;

γ. Ποιο το ημίτονο της γωνίας φ;



(Απ.: 281,4 m/s, 394 J, 0,44)

21. Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Α μάζας M = 4 kg. Ένα βλήμα μάζας m=100 g που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_o$=100 m/s, συγκρούεται με το σώμα Α, το διαπερνά σε χρόνο Δt = 0,1 s και εξέρχεται με ταχύτητα $υ_1$= 20 m/s.

α. Βρείτε την τελική ορμή του βλήματος.

β. Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος Α μετά την κρούση.

γ. Ποια η μεταβολή της ορμής του βλήματος και ποια του σώματος Α;

δ. Βρείτε την μέση δύναμη που δέχτηκε το σώμα Α κατά το πέρασμά του βλήματος από μέσα του.

ε. Σε μια στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α είναι 80 kg.m/s^2, ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή;

στ. Αν το σώμα Α παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,1, πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα Α, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει και πόσο χρόνο θα χρειαστεί γι' αυτό ; Δίνεται: g = 10m/s^2.

(Απ.: 2 kg.m/s, 2 m/s, +8 kg.m/s, -8 kg.m/s, 80 N, -80 kg.m/s^2, 2 m, 2 s)

22. Σώμα μάζας m_1=0,1 kg κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $υ_1$=3 m/s. Άλλο σώμα μάζας m_2=0,05 kg προηγείται του πρώτου, επίσης κινούμενο προς τα δεξιά με ταχύτητα $υ_2$=1,5 m/s. Τα δύο σώματα κινούνται στο οριζόντιο επίπεδο.

α. Ποια είναι η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων.

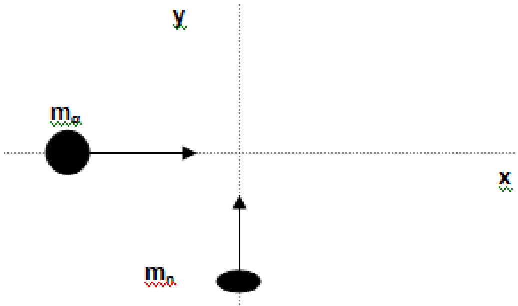
β. Ποια θα ήταν η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, αν το σώμα m_2 εκινείτο προς τα αριστερά;

γ. Το σώμα m_1 φτάνει το m_2, ενώνεται με αυτό και τα δύο σώματα κινούνται με κοινή ταχύτητα υ=2,5 m/s. Αυξήθηκε ή ελαττώθηκε η ορμή του m_1 και κατά πόσο; Πόση είναι τώρα η ορμή του συστήματος που προκύπτει από την ένωση των δύο σωμάτων;

δ. Αν υποθέσουμε ότι η σύγκρουση διήρκεσε Δt=0,1 s, ποιος είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος m_1; Πόση είναι η μέση τιμή της δύναμης που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής του m_1 και ποια πρέπει να είναι η διεύθυνσή της;

(Απ.: 0,375 kg.m/s, 0,225 kg.m/s, ελαττώθηκε κατά 0,05 kg.m/s-0,375 kg.m/s, 0,5 kg.m/s^2, 0,5 N)

23. Ένας πυρήνας αργού μάζας $m_π$=66,4.10^{-27} kg και ένα νετρόνιο μάζας m_n κινούνται πάνω στο ίδιο επίπεδο, ο πυρήνας κατά την διεύθυνση του άξονα X και το νετρόνιο κατά τη διεύθυνση του άξονα Y όπως φαίνεται στην εικόνα.

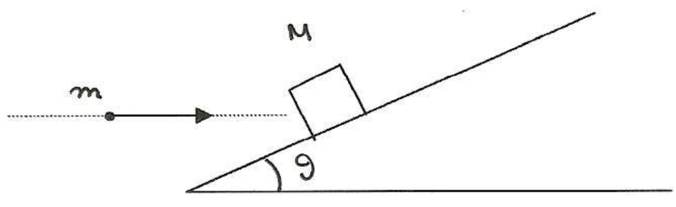


Αν οι ταχύτητές τους είναι αντίστοιχα $υ_π$=310 m/s και $υ_n$=2800 m/s και συγκρουσθούν με αποτέλεσμα το νετρόνιο να ενσωματωθεί στον πυρήνα, ποια είναι η ορμή του συστήματος μετά την κρούση;

Δίνεται m_n=1,66.10^{-27} kg.

(Απ.: 2,11.10^{-23} kg με θ=13^o)

24. Μια σφαίρα με μάζα m=1 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα 400 m/s και σφηνώνεται σε ένα κομμάτι ξύλο, μάζας M=9 kg, το οποίο βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ανηφορικό δρόμο, όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα.



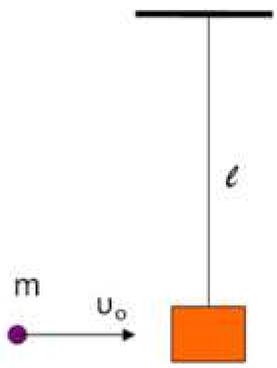
α. Να υπολογίσετε την μετατόπιση του συσσωματώματος μέχρι να ακινητοποιηθεί.

β. Ποια η μέση δύναμη της δύναμης που το κομμάτι ξύλο δέχεται από το έδαφος κατά την διάρκεια της κρούσης, αν αυτή διαρκεί Δt=0,1 s.

Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του ξύλου με τον δρόμο μ=0,5 και g=10 m/s^2 και ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

(Απ.: $\dfrac{m^2υ^2.συν^2θ}{2(M+m)^2.g.(μ.συνθ+ημθ)} = 51{,}2\,m$ **, 2472 N)**

25. Το σώμα του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M = 0, 98 kg και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους ℓ = 2m.



Κάποια χρονική στιγμή βλήμα μάζας m=0, 02 kg σφηνώνεται στο σώμα μάζας M και το συσσωμάτωμα που προκύπτει, εκτελώντας κυκλική κίνηση, φτάνει σε θέση όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία φ τέτοια ώστε συνφ=0,6 και σταματά στιγμιαία. Ο χρόνος κρούσης είναι Δt=0,05 sec. Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β. Την αρχική ταχύτητα υ_o του βλήματος.

γ. Την τάση του νήματος πριν την κρούση.

δ. Την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.

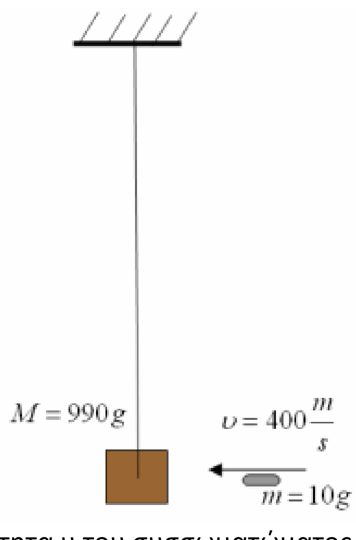
ε. Τη μηχανική ενέργεια, που μετατράπηκε σε θερμότητα στην πλαστική κρούση.

στ. Τη μέση δύναμη που ασκεί το βλήμα στο ξύλο.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 4 m/s, 200 m/s, 9,8 N, 18 N, 392 J, 78,4 N)

26 (YLIKONET_4.1.19). Το σώμα μάζας Μ του ακόλουθου σχήματος, έχει αμελητέες διαστάσεις και κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους 1 m από σταθερό σημείο. Βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα υ καρφώνεται στο σώμα. Ο χρόνος κρούσης είναι αμελητέος.



α. Να βρείτε την ταχύτητα υ του συσσωματώματος.

β. Να βρείτε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την διάρκεια της κρούσης.

γ. Ποιο πρέπει να είναι το όριο θραύσης του νήματος ώστε αυτό να μην κοπεί;

δ. Ποια η τάση του νήματος μετά την κρούση όταν αυτό σχηματίζει γωνία 60^o με την κατακόρυφο;

(Απ.: 4 m/s, 792 J, 26 N, 11 N)

27 (YLIKONET). Ένα σώμα Α με μάζα m_1=2 kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $υ_1$=14 m/s και προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε δεύτερο σώμα μάζας m_2=5 kg, το οποίο είναι ακίνητο. Σε μια στιγμή μετά από ελάχιστο χρόνο, το σώμα Β έχει ταχύτητα $υ_2'$=6 m/s και επιτάχυνση $α_2$=4 m/s^2. Ζητούνται για τη στιγμή αυτή:

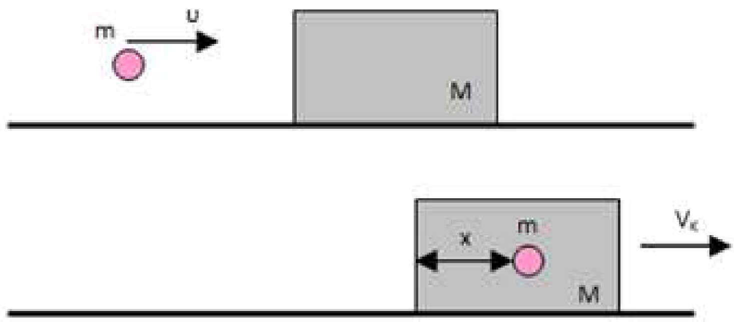
α. η ταχύτητα του σώματος Α,

β. η επιτάχυνση του σώματος Α,

γ. η συσπείρωση του ελατηρίου.

(Απ.: -1 Ν, -28 m/s^2, 0,28 m)

28. Ένα βλήμα μάζας m=0,1kg σφηνώνεται με ταχύτητα υ = 100m/s σε ακίνητο κιβώτιο μάζας M=0,9 kg όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το κιβώτιο μπορεί να ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο.



Αν η δύναμη αντίστασης που εμφανίζεται μεταξύ βλήματος και κιβωτίου κατά την κρούση θεωρηθεί σταθερού μέτρου F =4500 N, να υπολογίσετε:

α. Την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος.

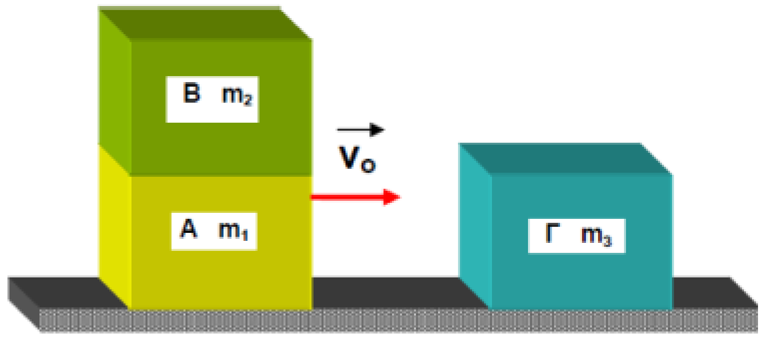
β. Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος βλήμα-κιβώτιο κατά τη διάρκεια της κρούσης.

γ. Το χρόνο που διαρκεί η κίνηση του βλήματος σε σχέση με το κιβώτιο.

δ. Πόσο βαθιά εισχωρεί το βλήμα στο κιβώτιο.

(Απ.: 10 m/s, -450 J, 0,002 s, 0,1 m)

29 (YLIKONET_4.1.16). Οι τρεις κύβοι Α, Β και Γ του ακόλουθου σχήματος έχουν ίσες διαστάσεις και μάζες $m_1=m_2=m_3$=m. Ο κύβος Γ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ το σύστημα των κύβων Α και Β, κινείται οριζόντια χωρίς τριβές με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=12 m/s. Ο κύβος Α προσκρούει μετωπικά στον κύβο Γ. Μετά την πρόσκρουση ο κύβος Α ενώνεται με τον κύβο Γ, ενώ ο κύβος Β περνά πάνω στον κύβο Γ όπου και παραμένει. Η θερμική ενέργεια που παράγεται κατά την ολίσθηση του κύβου Β, μέχρι να περάσει ολόκληρος πάνω στον κύβο Γ είναι Q=72 J. Να βρείτε:



α. Την τελική ταχύτητα του συστήματος.

β. Τις μάζες των κύβων.

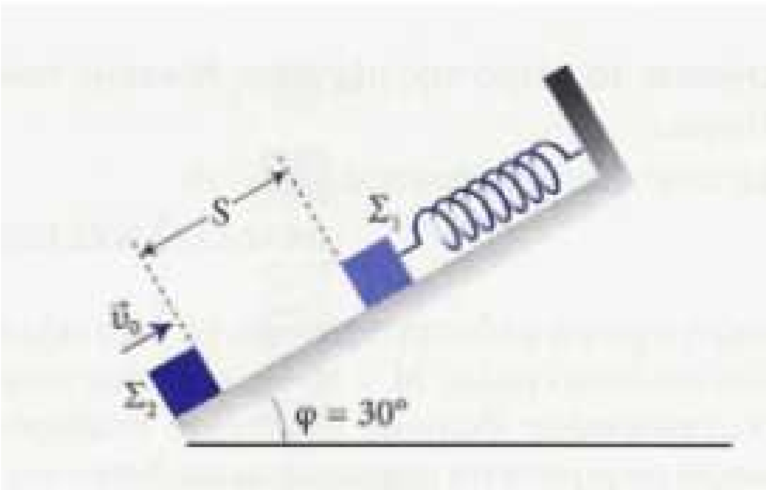
γ. Την θερμική ενέργεια που εκλύεται κατά την πρόσκρουση του κύβου Α στον κύβο Γ.

δ. Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των κύβων Α-Β που γίνεται θερμική ενέργεια κατά την διάρκεια του φαινομένου.

Δεχόμαστε ότι σε όλη την διάρκεια του φαινομένου, η απώλεια της μηχανικής ενέργειας οφείλεται αποκλειστικά στην μετατροπή της σε θερμική ενέργεια.

(Απ.: 8 m/s, 6 kg, 216 J, 0,33)

30 (ΑΓΙΑΝΝΙΩΤΑΚΗ-ΑΡΧΩΝ). Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας M=2 kg ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $φ=30^o$ στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m, το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα άλλο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=2 kg εκτοξεύεται από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=4 m/s, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, και αφού διανύσει διάστημα S=1,3 m στο κεκλιμένο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα $Σ_1$.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_2$ ελάχιστα πριν από την κρούση.

β. Να υπολογίσετε το ποσό θερμότητας που παράχθηκε κατά την κρούση.

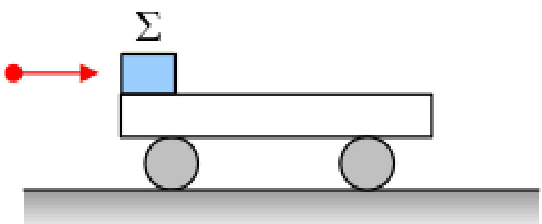
γ. Να υπολογίσετε την μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

δ. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, όταν η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία για πρώτη φορά.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: $\sqrt{3}$ m/s , 1,5 J, 0,2 m, 8 J)

31 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Ένα βλήμα μάζας 50 g κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_o$=100 m/s και σφηνώνεται στο σώμα Σ, το οποίο έχει μάζα m_1=950 g και ηρεμούσε πάνω σε ακίνητο αμαξίδιο. Παρατηρούμε ότι τελικά το σώμα μετακινείται κατά x_1=2 m πάνω στο αμαξίδιο, πριν σταματήσει να γλιστρά πάνω του, ενώ το όλο σύστημα μετακινείται με την ίδια ταχύτητα $υ_K$=1 m/s.



α) Βρείτε τη μάζα m_2 του αμαξιδίου.

β) Πόση θερμότητα παράγεται κατά την παραπάνω ολίσθηση;

γ) Υπολογίστε το μέτρο της τριβής που ασκείται μεταξύ του σώματος Σ και του αμαξιδίου, κατά την κίνηση του σώματος Σ πάνω στο αμαξίδιο.

δ) Βρείτε την μετακίνηση του αμαξιδίου, μέχρι να αποκτήσει την τελική του ταχύτητα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ. 4 kg, 5 N, 10 J, 0,4 m,)

Γ. ΠΛΑΓΙΑ (Η΄ ΜΗ ΜΕΤΩΠΙΚΗ) ΚΡΟΥΣΗ

32. Δύο σφαίρες Α και Β με μάζες $m_1=6$ kg και $m_2=4$ kg κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες $υ_1=1$ m/s και $υ_2=2$ m/s αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Να βρείτε:

α. Την ταχύτητα του συσσωματώματος κατά μέτρο και κατεύθυνση αμέσως μετά την κρούση.

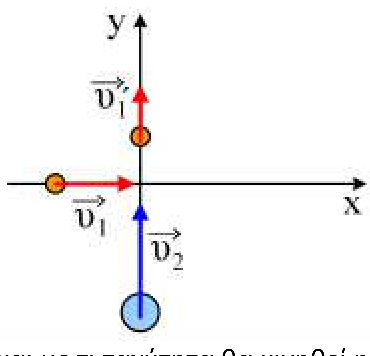
β. Το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.

(Απ.: 1 m/s, 54,5%)

33. Δύο σφαίρες Α και Β της ίδιας μάζας συγκρούονται μη μετωπικά. Οι σφαίρες πριν τη κρούση κινούνται με ταχύτητες $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$ που έχουν αντίστοιχα μέτρα 10 m/s και 20 m/s και κατευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ=30°. Μετά την κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών είναι $\vec{υ}_1{}'$ και $\vec{υ}_2{}'$ αντίστοιχα με μέτρα $10\sqrt{3}$ m/s και $10\sqrt{2}$ m/s αντίστοιχα. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι κατευθύνσεις των ταχυτήτων των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση.

(Απ.: 45°)

34 (YLIKONET_4.1.2). Σε μία κρούση δύο σφαίρες Α και Β με μάζες $m_1=2$ kg και $m_2=4$ kg κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως στο σχήμα, με ταχύτητες $υ_1=4$ m/s και $υ_2=6$ m/s αντίστοιχα. Μετά την κρούση η Α μπάλα κινείται στον άξονα y με ταχύτητα $υ_1{}'=3$ m/s.

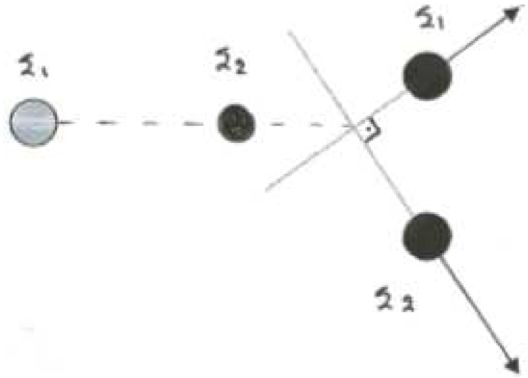


α. Σε ποια διεύθυνση και με τι ταχύτητα θα κινηθεί η μπάλα Β;

β. Η παραπάνω κρούση είναι ελαστική;

(Απ.: 4,92 m/s, εφθ=2,25, ΟΧΙ)

35. Σωμάτιο $Σ_1$ έχει ορμή $\vec{p}$ και συγκρούεται ελαστικά με αρχικά ακίνητο σωμάτιο $Σ_2$. Μετά την κρούση τα σωμάτια κινούνται όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τον λόγο των μαζών τους.



(Απ.: 1)

36. Μια σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=10 m/s και συγκρούεται ελαστικά με όμοια αρχικά ακίνητη σφαίρα Β. Αν το κέντρο της Β πριν τη κρούση απέχει από τον φορέα της $\vec{υ}_1$ απόσταση d=R$\sqrt{3}$, να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση.

(Απ.: 5$\sqrt{3}$ m/s, 5 m/s)

37. Μια σφαίρα Α μάζας m_1=2 kg κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=10$\sqrt{3}$ m/s και συγκρούεται ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα Β μάζας m_2=4 kg. Αν μετά την κρούση η σφαίρα Α κινείται σε διεύθυνση κάθετη στην αρχική της διεύθυνση, να βρείτε:

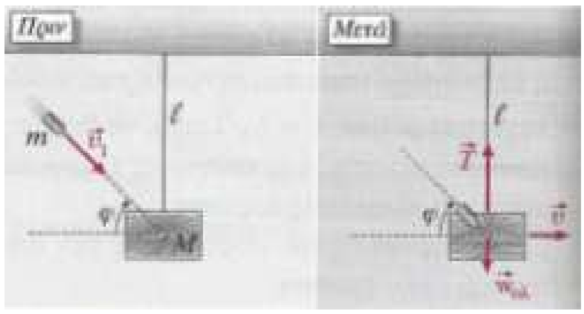
α. το μέτρο και την κατεύθυνση της ορμής του συστήματος μετά την κρούση,

β. τις ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση,

γ. τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α.

(Απ.: $20\sqrt{3}$kg.m/s, 10 m/s, 10 m/s, 30°, 40 kg.m/s)

38 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Ξύλο μάζας M=9,9 kg είναι κρεμασμένο από νήμα μήκους l=1 m. Βλήμα μάζας m=0,1 kg, που κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=100 m/s προς τα κάτω σε διεύθυνση που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία φ=45°, σφηνώνεται στο ξύλο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Αν ο χρόνος κίνησης του βλήματος μέσα στο ξύλο είναι t=0,01 sec, να βρείτε:



α. Την ανύψωση του κέντρου μάζας του ξύλου μετά την κρούση.

β. Την τάση του νήματος τη στιγμή που το βλήμα ηρεμεί ως προς το ξύλο.

γ. Τη μέση τάση του νήματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

(Απ.: 2,5 cm, 105 N, $100(5\sqrt{2}+1)$ N)

39. Μία σφαίρα μάζας m_1=2 kg κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=10 m/s και συγκρούεται ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2=2 kg. Αν η σφαίρα μάζας m_1 μετά την κρούση κινείται σε διαφορετική διεύθυνση από εκείνη της $\vec{υ}_1$, να βρείτε:

α. το μέτρο και τη διεύθυνση της ορμής του συστήματος των δύο σφαιρών μετά την κρούση,

β. τη γωνία μεταξύ των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

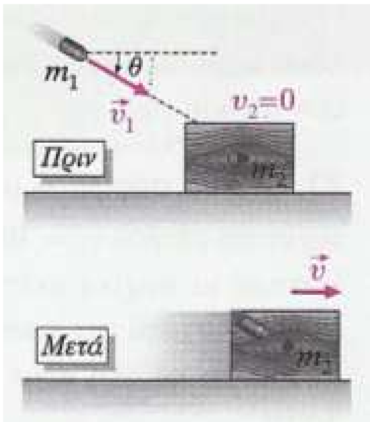
(Απ.: 20 kg.m/s, 90^o)

40 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Το βλήμα μάζας m_1=1 kg, πριν να σφηνωθεί στο κιβώτιο, έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1=8\sqrt{3}$ m/s σε διεύθυνση που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ=30^o. Αν το κιβώτιο έχει μάζα m_2=3 kg και παρουσιάζει με το οριζόντιο δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,1 να βρείτε:

α. την ταχύτητα του κιβωτίου αμέσως μετά την κρούση,

β. το διάστημα που διανύει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει,

γ. το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω των τριβών με το έδαφος. Ποιο είναι το άθροισμα αυτών των δύο ποσοστών; Να δικαιολογήστε το αποτέλεσμα.



(Απ.: 3 m/s, 4,5 m, 81,25% και 18,75%)

Δ. ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

41. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται σε συνάρτηση με τον χρόνο από την σχέση x=10.ημ(πt/4) (x σε cm, t σε s). Να βρείτε:

α. Το πλάτος A και η συχνότητα f της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

β. Την απομάκρυνση x_1 και την ταχύτητα $υ_1$ του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=1 s.

(Απ.: 10 cm και 0,125 Hz, 7,07 cm και 5,6 cm/s)

42. Ένα σώμα ξεκινά από την ηρεμία με επιτάχυνση μέτρου α=16 m/s^2 και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο θέσεων που απέχουν L=2 m. Να βρείτε:

α. Την περίοδο της ταλάντωσης.

β. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας είναι x=+0,8 m.

(Απ.: 1,57 s, 2,4 m/s)

43. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους Α=0,2 m και κυκλικής συχνότητας ω=20 rad/s. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.
Να γράψετε την εξίσωση, σε συνάρτηση με το χρόνο, για την απομάκρυνση x, αν δίνεται ότι για t_o=0 είναι

α. x=0 και υ>0 β. x=0 και υ<0
γ. x=+A δ. x=0,1 m και υ<0

(Απ.: χ=0,2.ημ(20.t), χ=0,2.ημ(20.t+π), χ=0,2.ημ(20.t+π/2), χ=0,2.ημ(20.t+5.π/6) (S.I.))

44. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνσή του από την θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση x=Α.ημ(ωt+$φ_o$).

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των μεγεθών Α, ω, $φ_o$ αν γνωρίζετε ότι η απόσταση των ακραίων θέσεων του υλικού σημείου είναι d=0,2 m και για t_o=0 είναι x=0,05 m και υ=-$\sqrt{3}$ m/s.

β. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_o=0 την επιτάχυνση του υλικού σημείου.

γ. Να παραστήσετε γραφικά, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας του, τη συνιστάμενη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο, αν η μάζα του είναι m=0,1 kg.

δ. Να παραστήσετε γραφικά την μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης με τον χρόνο.

(Απ.: 0,1 m, 20 rad/s και 5π/6, -20 m/s^2, ευθεία)

45. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α=4 cm και συχνότητα f=10Hz, τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση x=A=+4 cm. Να γραφούν οι εξισώσεις που δίνουν την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο και να παρασταθούν γραφικά.

(Απ.: x=0,04.ημ(20πt+π/2), υ=0,8π.συν(20πt+π/2), α=-16π^2.ημ(20πt+π/2) (S.I))

46. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του θα δίνεται από την εξίσωση x=Α.ημ(ωt+$φ_o$). Να αποδείξετε ότι:

α. i) $\boldsymbol{\upsilon} = \pm\boldsymbol{\omega}.\sqrt{\mathbf{A}^2 - \mathbf{x}^2}$

ii) $\boldsymbol{\alpha} = \pm\boldsymbol{\omega}.\sqrt{\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{max}}^2 - \boldsymbol{\upsilon}^2}$

β. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x, την επιτάχυνση του υλικού σημείου.

47. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση, στη θέση όπου η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $υ_1$=2 m/s η επιτάχυνση έχει μέτρο $α_1$=20 m/s^2, ενώ στη θέση όπου το μέτρο της ταχύτητας είναι $υ_2$=4 m/s το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $α_2$=5m/s^2. Να βρείτε το πλάτος Α της ταλάντωσης καθώς και την περίοδο Τ.

(Απ.: 0,73 m και 1,12 s)

48. Για μια απλή αρμονική ταλάντωση το πλάτος είναι Α=10 m και την χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_1=-5$\sqrt{3}$ m και κινείται προς τη θέση ισορροπίας του. Αν η περίοδος ταλάντωσης είναι Τ=2 s, να γράψετε τις εξισώσεις, σε συνάρτηση με τον χρόνο, της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος. Στην συνέχεια να παραστήσετε γραφικά την μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης με τον χρόνο.

(Απ.: x=10.ημ(πt+5π/3), υ=10π.συν(πt+5π/3), α=-10π^2.ημ(πt+5π/3) (S.I.))

49. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση, το πλάτος είναι Α=10 m και η συχνότητα f=0,5 Hz. Να βρείτε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να πάει το σώμα από τη θέση Α όπου x_1=+5 m στη θέση Γ όπου x_2=+5$\sqrt{3}$ m.
(Απ.: (1/6) s)

50. Υλικό σημείο εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος Α=0,2 m και περίοδο Τ=π s. Να βρείτε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από την θέση x_1=0,1 m στην θέση x_2=-0,1 m, αν δίνεται ότι το υλικό σημείο περνάει από την θέση x_1 κινούμενο:

i) προς την θετική κατεύθυνση,

ii) προς την αρνητική κατεύθυνση.

(Απ.: 1,57 s και 0,52 s αντίστοιχα)

51. (YLIKONET) Ένα υλικό σημείο κάνει Α.Α.Τ. με πλάτος 0,1m και στην αρχή των χρόνων, βρίσκεται σε σημείο Μ με απομάκρυνση 5cm, απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας. Μετά από 1s περνά ξανά από το Μ για πρώτη φορά με αντίθετη ταχύτητα.

i) Βρείτε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Ποια η εξίσωση της φάσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο; Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

(Απ.: x=0,1.ημ($\frac{2.\pi}{3}.t+\frac{\pi}{6}$), υ=$\frac{\pi}{15}$.συν($\frac{2.\pi}{3}.t+\frac{\pi}{6}$), $\varphi=\frac{2.\pi}{3}.t+\frac{\pi}{6}$ (S.I.))

52. (YLIKONET) Ένα ιστιοφόρο είναι αραγμένο στα ανοικτά ενός λιμανιού. Η ορατότητα μεταξύ του πλοίου και του λιμανιού εμποδίζεται από τον τοίχο ενός λιμενοβραχίονα. Μια μέρα με θαλασσοταραχή, ένας παρατηρητής που στέκεται στην προβλήτα, διακρίνει μόνο το πάνω τμήμα του πιο ψηλού ιστού του πλοίου, να κινείται κατακόρυφα. Με τον χρονομετρητή του ρολογιού του, μετρά το χρόνο που βλέπει την κορυφή του ιστού και τον βρίσκει 10 sec, ενώ το χρόνο που δεν τη βλέπει 20 sec. Εκτιμά δε ότι το μέγιστο ύψος του ιστού πάνω από τον λιμενοβραχίονα είναι 0,5 m. Να θεωρήσετε την κίνηση του ιστού ως α.α.τ. και να βρείτε:

α. τη συχνότητα,

β. το πλάτος,

γ. τις εξισώσεις απομάκρυνσης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου θεωρώντας ως χρονική στιγμή t_o=0 τη στιγμή που εμφανίζεται για πρώτη φορά η κορυφή του ιστού πάνω από τον λιμενοβραχίονα και ως θετική τη φορά της ταχύτητας τότε,

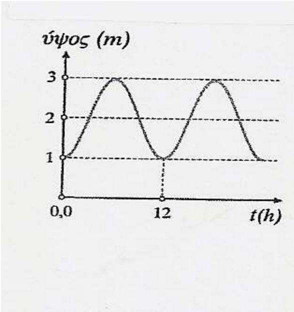
δ. το χρόνο από τη στιγμή που εμφανίζεται η κορυφή του ιστού πάνω από τον λιμενοβραχίονα, μέχρι να σταματήσει να κινείται για πρώτη φορά, στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της.

(Απ.: $\frac{1}{30}$Hz, 1 m, x=ημ($\frac{\pi}{15}.t+\frac{\pi}{6}$) και υ=$\frac{\pi}{15}$.συν($\frac{\pi}{15}.t+\frac{\pi}{6}$) (S.I.), 20 sec)

53. (Σαβ.1.32/α΄τόμος) Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται γραφικά, η μεταβολή με τον χρόνο του ύψους του νερού από τον πυθμένα της θάλασσας σε ένα λιμάνι του Ευβοϊκού.

α. Να γράψετε την εξίσωση του ύψους της στάθμης του νερού σαν συνάρτηση του χρόνου.

β. Για να μπει ένα πλοιάριο με ασφάλεια στο λιμάνι, πρέπει το ύψος της στάθμης του νερού να είναι 1,5 m. Το πλοιάριο φτάνει έξω από το λιμάνι όταν το ύψος της στάθμης του νερού έχει την ελάχιστη τιμή του. Πόσο χρόνο πρέπει να περιμένει το πλοιάριο, ώστε να μπει με ασφάλεια στο λιμάνι;



(Απ.: ημ($\frac{\pi}{6}$.t + $\frac{3.\pi}{2}$) + 2 (S.I.), 2 h)

54. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση το σώμα που ταλαντώνεται διανύει απόσταση 40 cm σε κάθε περίοδο. Την χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1=5\sqrt{2}$ cm και κινείται προς τη θέση ισορροπίας του. Αν η περίοδος ταλάντωσης είναι T=2 s:

α. να γράψετε τις εξισώσεις, σε συνάρτηση με τον χρόνο, της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος. Στην συνέχεια να παραστήσετε γραφικά την μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης με τον χρόνο.

β. να βρείτε τη χρονική στιγμή που για πρώτη φορά το σώμα θα βρεθεί στη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης.

γ. να βρείτε τις χρονικές στιγμές στο διάστημα των 5 πρώτων sec που το σώμα περνά από την θέση ισορροπίας.

Δίνεται $\pi^2 \cong 10$.

(Απ.: x=0,1.ημ(π.t+3π/4), υ=0,1.π.συν(π.t+3π/4), α=-ημ(π.t+3π/4) (S.I.), 0,75 sec, 0,25, 1,25, 2,25, 3,25 και 4,25 sec)

Ε. ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ- ΔΥΝΑΜΗ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ

55. Ένα σώμα μάζας m=2 kg κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=5m. Όταν η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας είναι x=3 m, η δύναμη επαναφοράς έχει μέτρο F=96 N. Να βρείτε:

α. Τη σταθερά επαναφοράς D,

β. τη συχνότητα f της ταλάντωσης,

γ. το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στη θέση όπου η απομάκρυνση είναι x=+3 m.

(Απ.: 32 N/m, 0,64 Hz, 16 m/s και 48 m/s^2)

56. Υλικό σημείο μάζας $m=10^{-2}$ kg εκτελεί Α.Α.Τ. πλάτους A=0,2 m. Τη χρονική στιγμή $t_o=0$ περνάει από την θέση x=0,1 m κινούμενο κατά την θετική κατεύθυνση, ενώ την χρονική στιγμή $t_1=(2/3)$ sec περνάει από την ίδια θέση κινούμενο κατά την αρνητική κατεύθυνση. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από την θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

β. Να γράψετε για την ταλάντωση που εκτελεί το υλικό σημείο τις εξισώσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:

i) της απομάκρυνσης x ii) της ταχύτητας υ iii) της επιτάχυνσης α.

γ. Κατά το χρονικό διάστημα της κίνησης από $t_o=0$ μέχρι $t_2=(1/3)$ sec, να βρείτε για την συνιστάμενη δύναμη που ενεργεί στο σώμα το έργο της.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

(Απ.: 2 s, x=0,2.ημ(πt+π/6), υ=0,2π.συν(πt+π/6), α=-2.ημ(πt+π/6) (S.I.), -0,0015 J)

57. Ένα σώμα μάζας m=2 kg κάνει Α.Α.Τ. πλάτους A=1 m και περιόδου T=2s. Αν τη χρονική στιγμή $t_1=0$ η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας του είναι $x_1=+\frac{\sqrt{2}}{2}$ m και η ταχύτητά του είναι αρνητική, να βρείτε:

α. τη σταθερά επαναφοράς D,

β. την αρχική $φ_o$,

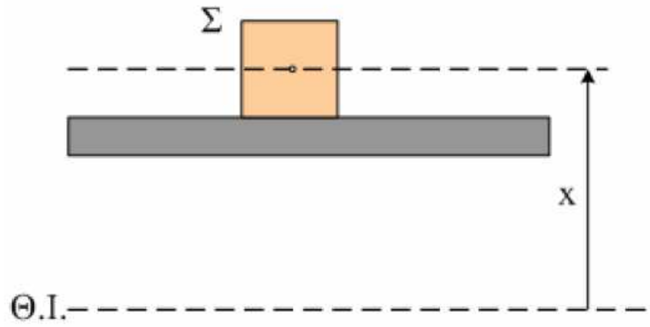
γ. τη δύναμη επαναφοράς την χρονική στιγμή $t_2=3$ s.

(Απ.: 2π² N/m, 3π/4 rad, π²$\sqrt{2}$ N)

58 (YLIKONET). Ένα σώμα Σ μάζας 2kg στηρίζεται σε μια σανίδα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξίσωση x=0,4ημ5t (θετική φορά προς τα πάνω, μονάδες στο S.I.).

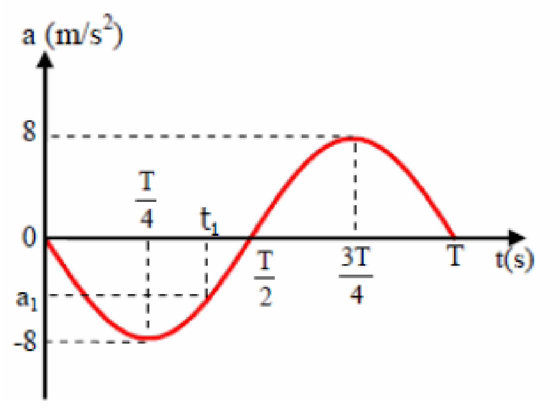
i) Πόση δύναμη δέχεται από την σανίδα 0,3m πάνω από τη θέση ισορροπίας;

ii) Να γίνει το διάγραμμα της παραπάνω δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο.



(Απ.: 5 N, N=20-20.ημ5t (S.I.))

59. (YLIKONET) Σώμα μάζας m=0,4 kg εκτελεί Α.Α.Τ. και σε χρονικό διάστημα Δt=10.π sec διέρχεται 20 φορές από τις ακραίες θέσεις της τροχιάς του, έχοντας εκτελέσει ακέραιο πλήθος πλήρων ταλαντώσεων. Αν η γραφική παράσταση που δίνει την μεταβολή της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι όπως στο ακόλουθο διάγραμμα και την χρονική στιγμή t_1 η τιμή της επιτάχυνσης είναι $a_1=ω.υ_1$ όπου ω η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και $υ_1$ η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1:



α. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω της Α.Α.Τ.

β. Να υπολογιστεί η απομάκρυνση του σώματος x_1, η ταχύτητά του $υ_1$ και η επιτάχυνση a_1 την χρονική στιγμή t_1.

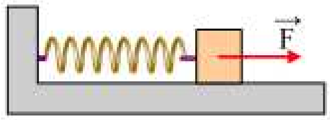
γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης και της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνιστάμενης δύναμης σε συνάρτηση με την ταχύτητα ΣF=f(υ).

ε. Να υπολογιστεί το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα από t_1 ως $\frac{3.T}{4}$.

(Απ.: $2\,\text{rad/s}$, $+\sqrt{2}\text{m}$, $-2\sqrt{2}\text{m/s}$, $-4\sqrt{2}\text{m/s}^2$, $x = 2.\eta\mu 2t$, $F_{ΕΠ} = -3{,}2.\eta\mu 2t$, $\sum F = \pm 0{,}8.\sqrt{16-\upsilon^2}$, $0{,}8.\sqrt{2}\text{kg.m/s}$**)**

60. Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας 2 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m. Σε μία στιγμή που θεωρούμε t=0, ασκούμε στο σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη, όπως στο σχήμα, μέτρου F=40 N.



i) Να αποδείξετε ότι τον σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να υπολογίστε το πλάτος της ταλάντωσης.

ii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος.

iii) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου ως συνάρτηση της απομάκρυνσης από την Θ.Ι. και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

iv) Αν πάνω στο σώμα $Σ_1$ τοποθετήσουμε ένα σώμα $Σ_2$ μάζας 2 kg επίσης, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής ώστε το $Σ_2$ να μην ολισθαίνει πάνω στο $Σ_1$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 0,2 m, $\upsilon = 2.\sigma\upsilon\nu(10.t + \frac{3.\pi}{2})\ (\text{S.I.})$, **$F_{ελ}$=-200.x-40 (S.I.), 1)**

ΣΤ. ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ- ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

61. Να αποδείξετε την σχέση υ=$\pm\omega.\sqrt{A^2 - x^2}$, η οποία συνδέει την ταχύτητα υ με την απομάκρυνση x του σώματος στην απλή αρμονική ταλάντωση, χρησιμοποιώντας θεωρήματα ενέργειας.

62. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και περιόδου Τ=6 s με εξίσωση απομάκρυνσης x=Α.ημωt. Να βρείτε τι ποσοστό της ενέργειας ταλάντωσης είναι η κινητική ενέργεια ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t=0,5 s.

(Απ.: 75%)

63. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Να βρείτε στη θέση όπου η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι x=+A/2 το ποσοστό της ενέργειας ταλάντωσης που αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια ταλάντωσης.

(Απ.: 75%)

64. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α=6 m να βρείτε τις θέσεις όπου η κινητική ενέργεια ταλάντωσης είναι οκταπλάσια της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.

(Απ.: ±2 m)

65. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Να βρείτε τον λόγο της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης K/U στις θέσεις όπου η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του έχει μέτρο:

α. x=A/4 β. x=A/2 γ. x=A

(Απ.: 15, 3, 0)

66. Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης x=A.ημωt. Να υπολογίσετε τον λόγο της κινητικής προς τη δυναμική του ενέργεια ταλάντωσης, K/U, τις χρονικές στιγμές:

α. T/4

β. T/3

(Απ.: 0, 1/3)

67. Να βρείτε για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T=8 s και με αρχική φάση ϕ_o=0, ποιες χρονικές στιγμές η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την δυναμική.

(Απ.: 1 s, 3 s, 5 s, 7 s)

68. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. Όταν η απομάκρυνσή του έχει τιμές x_1 και x_2, η ταχύτητα έχει τιμές υ_1 και υ_2 αντίστοιχα. Αν η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας δίνεται από την σχέση x=A.ημ(ωt+ϕ_o) να αποδείξετε:

α. $T = 2\pi.\sqrt{\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$ και β. $A = \sqrt{\dfrac{\upsilon_1^2.x_2^2 - \upsilon_2^2.x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$

69. Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο T=(π/5) s. Η κινητική ενέργεια K του σώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από την θέση ισορροπίας του δίνεται από την σχέση:

$$K=-50.x^2+8 \quad (S.I.)$$

Να υπολογίσετε:

α. το πλάτος της ταλάντωσης,

β. τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης,

γ. τη μάζα του σώματος,

δ. το έργο της δύναμης επαναφοράς κατά την μετατόπιση του σώματος από τη θέση x=0 έως την θέση x=-A/2.

(Απ.: 0,4 m, 100 N/m, 1 kg, -2 J)

70. Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. της οποίας η εξίσωση κίνησης δίνεται από την σχέση:

$$x=0,2.ημ(10.t) \quad (S.I.)$$

Ποιες χρονικές στιγμές ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας μεγιστοποιείται κατά απόλυτη τιμή και σε ποιες θέσεις συμβαίνει αυτή η μεγιστοποίηση; Δίνεται ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός: ημ2α=2.ημα.συνα.

(Απ.: $\boldsymbol{(\frac{\pi}{40} + k.\frac{\pi}{20})\,s,\ \pm 0,1.\sqrt{2}\,m}$ **)**

71. Υλικό σημείο εκτελεί Α.Α.Τ. Η απομάκρυνσή του x από την θέση ισορροπίας δίνεται από την εξίσωση x=0,2.$\sqrt{2}$.ημ(20πt+ϕ_o) (S.I.).

α. Για ποιες τιμές της απομάκρυνσης η δυναμική ενέργεια U είναι ίση με το 50% της ολικής ενέργειας E της ταλάντωσης;

β. Να βρείτε την τιμή της αρχικής φάσης ϕ_o, αν δίνεται ότι για το t_o=0 είναι K=(3/4).E και x>0, υ<0.

γ. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, αν το υλικό σημείο έχει μάζα m=0,01 kg;

Δίνεται ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός $ημα.συνα = \frac{1}{2}.ημ2α$.

(Απ.: -0,2 m και 0,2 m, 5π/6, 99,06 J/s)

72. Υλικό σημείο μάζας m=0,01 kg εκτελεί Α.Α.Τ. και η ολική του ενέργεια είναι $E=32.10^{-4}$ J. Η απομάκρυνση x του υλικού σημείου από την θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και η επιτάχυνση του α συνδέεται με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του με την σχέση α=-16.x (στο S.I.).

α. Να βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης x σε συνάρτηση με τον χρόνο, αν για t_o=0 το υλικό σημείο έχει K=U και κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση.

γ. Να γράψετε την εξίσωση που δίνει τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Δίνεται ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός $ημα.συνα = \frac{1}{2}.ημ2α$.

(Απ.: (π/2) s, 0,2 m, x=0,2.ημ(4t+π/4) ή x=0,2.ημ(4t+7π/4) (στο S.I.),
$\frac{dK}{dt}$ = 0,0128.ημ $(8.t + \pi/2)$ ή $\frac{dK}{dt}$ = 0,0128.ημ $(8.t + 7.\pi/2)$ **(S.I.)))**

73. Ένα σώμα είναι συνδεδεμένο στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=900 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σύστημα εκτελεί Α.Α.Τ. σε οριζόντιο επίπεδο με περίοδο T=(π/15) s. Το σώμα την χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από την θέση ισορροπίας του με ταχύτητα υ=6 m/s κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. Να βρείτε:

α. το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος,

β. τη μάζα του σώματος,

γ. την απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες για το χρονικό διάστημα από 0 ως (2π/15) s,

δ. για ποιες απομακρύνσεις ισχύει K=3.U, όπου K η κινητική ενέργεια και U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

(Απ.: 0,2 m, 1 kg, 0,2.ημ30t (S.I.), $\pm 0,1$ m)

74. (YLIKONET) Σώμα μάζας m=1kg εκτελεί α.α.τ. με αρχική φάση π/6. Σε χρονικό διάστημα Δt=π sec, το σώμα εκτελεί ακέραιο πλήθος πλήρων ταλαντώσεων και η δυναμική του ενέργεια μεγιστοποιείται 10 φορές. Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης εξισώνεται με τη δυναμική σε δύο θέσεις της ταλάντωσης που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $0,4.\sqrt{2}m$.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να υπολογίσετε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας στο χρονικό διάστημα t_1=T/4 ως t_2=T/2. Σε αυτό το χρονικό διάστημα το σώμα πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας;

γ. Να υπολογιστεί ο ρυθμός παραγωγής ή κατανάλωσης έργου dW_F/dt της δύναμης επαναφοράς όταν το σώμα βρεθεί στη θέση +A/2.

δ. Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της δυναμικής και κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1=T/4.

(Απ.: $x = 0,4.ημ(10.t + \frac{\pi}{6})(S.I.)$, -4 J, $\pm 40\sqrt{3}$J/s , $-40\sqrt{3}$J/s και $+40\sqrt{3}$J/s)

<u>Ζ. ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ</u>

75. Σώμα μάζας m=2 kg βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=8 N/m. Απομακρύνουμε το σώμα κατά x_1=10 cm από την θέση ισορροπίας του προς την θετική κατεύθυνση και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να βρείτε την περίοδο Τ της ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα.

γ. Να βρείτε την απομάκρυνση x και την ταχύτητα υ του σώματος μετά από χρόνο t=π/2 s από την στιγμή που το αφήσαμε ελεύθερο.

(Απ.: π s, -10 cm-0)

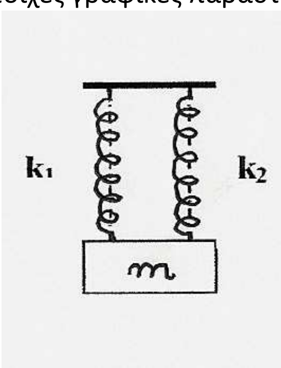
76. Ένας δίσκος κρέμεται στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου (πάνω άκρο) είναι στερεωμένο ακλόνητα. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι 0,2 s. Όταν στον δίσκο τοποθετηθούν σταθμά μάζας 1,5 kg η περίοδος ταλάντωσης γίνεται 0,4 s. Να υπολογιστεί η μάζα του δίσκου και η σταθερά k.

(Απ.: 0,5 kg, 493,4 N/m)

77. (Άσκ23, σελ.232, β΄ λυκείου). Σώμα μάζας m=0,1 kg είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς k_1=10 N/m, ενώ απλά ακουμπά στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς k_2=30 N/m.
Αν προσδώσουμε οριζόντια ταχύτητα στο σώμα κατά την διεύθυνση των αξόνων των ελατηρίων να βρείτε την περίοδο κίνησης που θα εκτελέσει, αν στην Θ.Ι. θεωρήσουμε ότι τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος.

(Απ.: 0,15.π sec)

78. Σώμα μάζας m=2 kg ισορροπεί δεμένο στις ελεύθερες άκρες δύο κατακόρυφων ελατηρίων με σταθερές k_1=150 N/m και k_2=50 N/m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα από την θέση ισορροπίας του κατά $Δx=10^{-2}$m προς την θετική κατεύθυνση και στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο την χρονική στιγμή t=0, να βρείτε το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει, να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσής, της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του, από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο και να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



(Απ.: 0,01.ημ(10.t+π/2), 0,1.συν(10.t+π/2), -ημ(10.t+π/2) (S.I.))

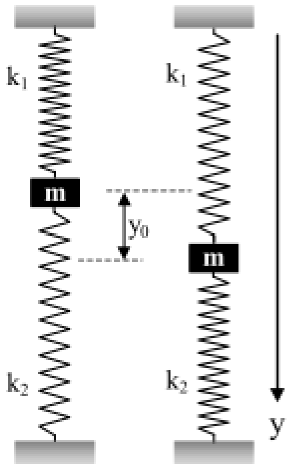
79 (ΚΕΕ,ασκ.58). Σημειακό αντικείμενο μάζας m=1 kg ισορροπεί συνδεδεμένο στα άκρα δύο κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι k_1=250 N/m και k_2=150 N/m. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά την διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

β. Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι y_o=Α=0,2 m, πόση είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας m;

γ. Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια κάθε ελατηρίου;

Να θεωρήσετε ότι στη θέση που η μάζα ισορροπεί το ελατήριο σταθεράς k_1 είναι τεντωμένο και το ελατήριο σταθεράς k_2 είναι συσπειρωμένο, ενώ αρχικά στην Θ.Φ.Μ., τα ελατήρια βρίσκονται σε επαφή. Δίνεται g=10 m/s^2.



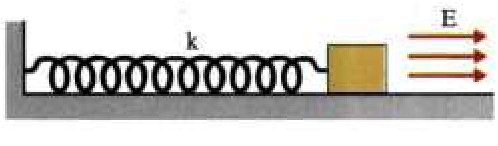
(Απ.: (π/10) s, 8 J, 3,8 J και 6,3 J)

80. Το σώμα που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα έχει μάζα 1 kg και αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς 64N/m. Το σώμα είναι φορτισμένο με φορτίο 6,4.10^{-3} C και βρίσκεται σε μια περιοχή όπου υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως 100 N/C παράλληλης με τον άξονα του ελατηρίου. Αν το ηλεκτρικό πεδίο καταργηθεί:

α. Να δείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδό του.

β. Να βρείτε την μέγιστη ταχύτητα που το σώμα αποκτά και τον χρόνο που περνά μέχρι να αποκτήσει αυτή την ταχύτητα.

γ. Να δείξετε ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδό του, στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο δεν καταργηθεί.



(Απ.: (π/4) sec, 0,08 m/sec - (π/16) sec, (π/4) sec)

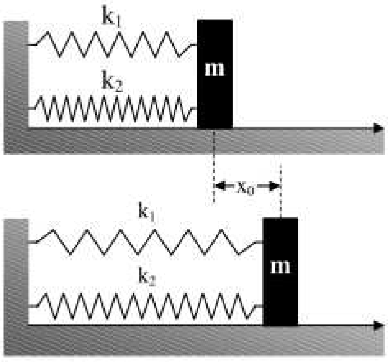
81. Σώμα μάζας m=1 kg ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο συνδεδεμένο στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι αντίστοιχα k_1=220 N/m και k_2=180 N/m. Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων κατά Α=x_o=0,2 m και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας-ελατηρίων θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

β. Πόση είναι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης;

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο, αν για t=0 η μάζα διέρχεται από την θέση x=-0,1 m κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση. Η απομάκρυνση x είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

δ. Να παραστήσετε γραφικά την μεταβολή της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης με τον χρόνο.

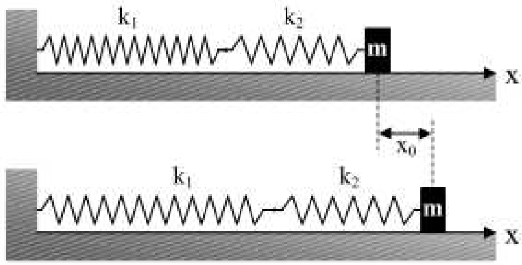


(Απ.: (π/10) s, 8 J, x=0,2ημ(20t+7π/6) (S.I.))

82. Δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1=200 N/m και k_2=300 N/m συνδέονται σε σειρά. Το ένα άκρο του συστήματος που προκύπτει συνδέεται ακλόνητα με κατακόρυφο τοίχο και το άλλο άκρο συνδέεται με σώμα μάζας m=0,3kg. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τη μάζα από την θέση ισορροπίας της κατά την διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων κατά $A=x_o$=0,2 m και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας-ελατηρίων θα εκτελέσει Α.Α.Τ., να υπολογίσετε την περίοδο Τ και την ενέργεια της ταλάντωσης.

β. Ποιο ποσοστό επί τοις % της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι κινητική ενέργεια της μάζας, όταν διέρχεται από την θέση x=0,1 m;



(Απ.: 0,1π s και 2,4 J, 75%)

83. Στο ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m εξαρτάται σώμα μάζας m=1 kg. Το άνω άκρο του ελατηρίου είναι σταθερά στερεωμένο. Ανυψώνουμε το σώμα κατακόρυφα, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και τη χρονική στιγμή t=0 του προσδίδουμε κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \sqrt{3}$ m/s με φορά προς τα κάτω.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης του σώματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

γ. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του ελατηρίου κατά την μετατόπισή του σώματος από το σημείο εκκίνησης μέχρι το κατώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται g=10 m/s^2, ενώ θετική φορά του άξονα y θεωρείται η προς τα πάνω.

(Απ.: 0.2 m, 0.2.π sec, v=2.συν (10.t+5.π/6) (S.I.), -4.5 J)

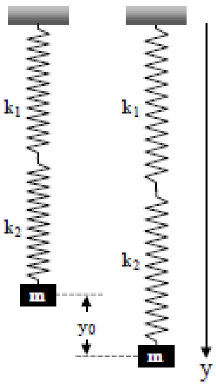
84 (ΚΕΕ,ασκ.61). Δύο ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1=150 N/m και k_2=300 N/m συνδέονται σε σειρά. Το ένα άκρο του συστήματος που προκύπτει συνδέεται ακλόνητα με οροφή και το άλλο άκρο συνδέεται με σώμα μάζας m=1 kg, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί. Απομακρύνουμε τη μάζα από την θέση ισορροπίας της κατά την διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων κατά y_o=0,2 m και την χρονική στιγμή t=0 την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα μάζας-ελατηρίου θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να υπολογίσετε την περίοδο Τ.

β. Πόση είναι η ενέργεια της ταλάντωσης;

γ. Ποιο ποσοστό επί τοις % της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι κινητική ενέργεια της μάζας όταν διέρχεται από την θέση με y= $-(\sqrt{3}/10)$ m; Δίνεται g=10 m/s^2.

δ. Να γράψετε την εξίσωση που δίνει την μεταβολή του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο.



Δίνεται ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός ημα.συνα=(1/2).ημ2α.
(Απ.: (π/5) s, 2 J, 25%, 20.ημ(20.t+π) (S.I.))

85. Το σώμα μάζας m=2 kg του ακόλουθου σχήματος είναι στερεωμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Το σώμα ισορροπεί σε θέση Ζ πάνω από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου με την βοήθεια κατακόρυφης δύναμης μέτρου F=80 N. Τη χρονική στιγμή t=0 καταργούμε ακαριαία τη δύναμη, οπότε το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ.

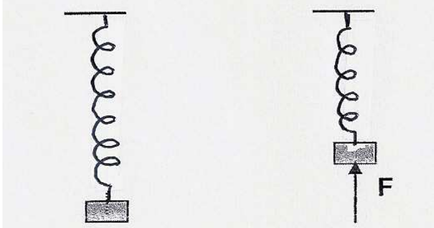
α. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

β. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από την θέση Σ, η οποία βρίσκεται σε απόσταση x_1=0,2 m κάτω από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς και την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

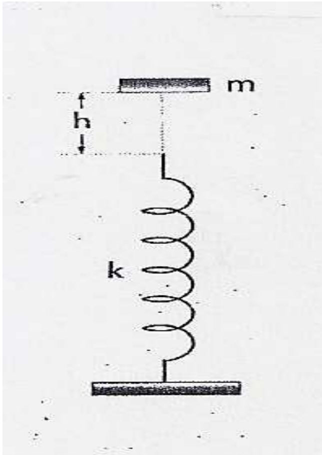
δ. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με τον χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες.

Δίνεται g=10 m/s^2 ενώ θετική φορά του άξονα y θεωρείται η προς τα πάνω.



(Απ.: 0,4m, +10m/s^2, $F_{ελ}$=20-80.ημ(10t+π/2) (S.I.), U=16.συν^{2}10t και K=16.ημ^{2}10t (S.I.))

86. (Σελ57/Δημόπουλος, α΄ τόμος). Σώμα μάζας m=2 kg βρίσκεται σε ύψος h=15 cm άνω από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στο έδαφος. Το κέντρο μάζας του σώματος βρίσκεται στην προέκταση του άξονα του ελατηρίου. Όταν το σώμα αφήνεται ελεύθερο και συναντά το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, παραμένει στη συνέχεια σε μόνιμη επαφή με αυτό.



Αν η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι x_{max}=30cm, ζητείται:

α. Να υπολογιστεί η σταθερά k του ελατηρίου.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος Α και τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης του συστήματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο, αν χρονική στιγμή t=0 θεωρείται η στιγμή της κρούσης.

Δίνεται g=10 m/s^2 ενώ θετική φορά του άξονα y θεωρείται η προς τα πάνω.

(Απ.: 200 N/m, 20 cm και 10 rad/s, x=0,2.ημ(10t+5π/6) (S.I.))

87. Σώμα μάζας m_1=2 kg είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Άλλο σώμα μάζας m_2 είναι δεμένο μέσω αβαρούς νήματος με το σώμα μάζας m_1. Το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί ακίνητο. Τη χρονική στιγμή t=0 κόβουμε το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος m_1 από την θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τον τύπο: $x = 0{,}4.\eta\mu(10t + \pi/2)(S.I.)$. Να υπολογίσετε:

α. τη σταθερά k του ελατηρίου καθώς και τη μάζα m_2,

β. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_1 τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση x_1=-0,2 m,

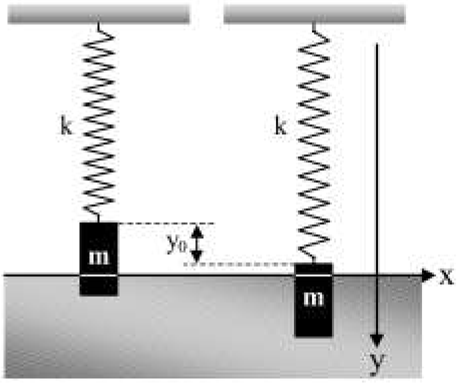
γ. τη μέγιστη τιμή της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα μάζας m_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του,

δ. το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m_1, τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Δίνεται g=10 m/s^2.

(Απ.: 200 N/m, 8 kg, 2 $\sqrt{3}$ m/s, 100 N, 20 N)

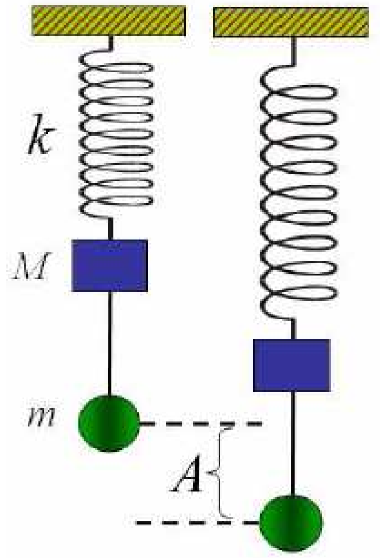
88. Κύλινδρος μάζας m και εμβαδού διατομής S κρέμεται από την ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k. Ο κύλινδρος ισορροπεί βυθισμένος κατά ένα τμήμα του μέσα σε υγρό πυκνότητας d. Απομακρύνουμε λίγο τον κύλινδρο από την θέση ισορροπίας του έστω κατά y_o και μετά τον αφήνουμε ελεύθερο.



Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο T της ταλάντωσης αυτής. Η επιτάχυνση g της βαρύτητας θεωρείται γνωστή.

(Απ.: 2π $\sqrt{\dfrac{m}{k+d.g.S}}$ **)**

89. Το σύστημα του ακόλουθου σχήματος ισορροπεί όπως φαίνεται στην αριστερή θέση, έχοντας επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$ σε σχέση με την θέση φυσικού μήκους. Το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα έχει αμελητέα μάζα.
Εκτρέπω τα σώματα προς τα κάτω κατά Α και την χρονική στιγμή t=0 το αφήνω ελεύθερο.



α) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του Α ώστε το νήμα να παραμείνει τεντωμένο;

β) Να παρασταθεί γραφικά η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Μ ως συνάρτηση του χρόνου για την περίπτωση όπου $A = \Delta\ell/2$.

γ) Αν Α=2.Δℓ βρείτε το μέτρο της ταχύτητας των σωμάτων όταν η τάση του νήματος μηδενίζεται.

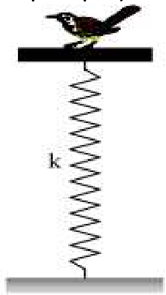
Θετική φορά θεωρείται η προς τα κάτω.

(Απ.: $\mathbf{A \le \dfrac{(M+m).g}{k}}$, $\mathbf{T = m.g[1+\dfrac{1}{2}.συν\left(\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}.t\right)]}$, $\mathbf{υ = \sqrt{\dfrac{3.k}{M+m}}.\Delta\ell}$ **)**

Η. ΚΡΟΥΣΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

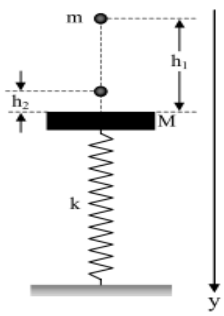
90. Σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=1 kg είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=0,1 m κατά μήκος λείου οριζόντιου επιπέδου. Όταν το σώμα $Σ_1$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=3 kg. Η κρούση είναι μετωπική και η διάρκεια της είναι αμελητέα. Να βρείτε την εξίσωση της Α.Α.Τ. που εκτελεί το σώμα θεωρώντας χρονική στιγμή t=0 την στιγμή της κρούσης και θετική φορά, την φορά της αρχικής ταχύτητας του σώματος.
(Απ.: 0,05.ημ10t (S.I.))

91 (ΚΕΕ,ασκ.73). Δίσκος μάζας M=1 kg είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=200 N/m, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο δίσκο κάθεται ένα πουλί μάζας m=0,2kg και κάποια στιγμή εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ=2 m/s. Να βρείτε:



α. Το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά ο δίσκος.
β. Το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου.
γ. Τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.
δ. Τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
Δίνεται g=10 m/s^2.
(Απ.: 0,4 m/s, 0,03 m, 0,09 J, 0,64 J)

92 (ΚΕΕ,ασκ.68). Σφαίρα μάζας m=1 kg αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h_1=5 m πάνω από δίσκο μάζας M=10kg, ο οποίος ισορροπεί συνδεδεμένος στη μία άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=1000 N/m, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

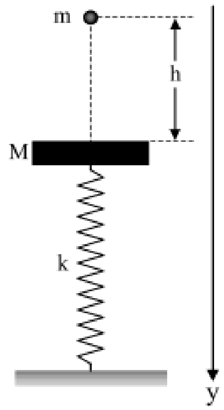


Η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά με τον δίσκο και η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Μετά την κρούση η σφαίρα φτάνει σε ύψος h_2=1,25 m. Να βρείτε:
α. τα μέτρα των ταχυτήτων της σφαίρας και του δίσκου αμέσως μετά την κρούση,
β. το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου,
γ. τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του δίσκου όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.
(Απ.: 5 m/s, 1,5 m/s, 0,15 m, -150 N, 150 N)

93 (ΚΕΕ,ασκ.67). Δίσκος μάζας M=3,75 kg είναι συνδεδεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο του δαπέδου. Από ύψος h=0,75 m πάνω από τον δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερο ένα σφαιρίδιο μάζας m=0,25 kg, το οποίο συγκρούεται με το δίσκο μετωπικά και πλαστικά, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

α. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης, αν το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή t=0 έχει ταχύτητα μέγιστου μέτρου, με κατεύθυνση προς τα πάνω.



(Απ.: 25.10^{-3} m, $y=25.10^{-3}$.ημ(10t+π) (S.I.))

94. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=20 N/m είναι στερεωμένο στην οροφή. Στο άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο σώμα $Σ_1$ μάζας m=0,2 kg το οποίο εκτελεί Α.Α.Τ. πλάτους A=0,2 m. Κάποια στιγμή t_o=0 που την θεωρούμε αρχή του χρόνου, ενώ το σώμα βρίσκεται στο μισό του πλάτους κατερχόμενο προς τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα $Σ_2$ ίσης μάζας που έχει αντίθετη ταχύτητα. Να βρείτε την εξίσωση κίνησης του συσσωματώματος.
Η κρούση να θεωρηθεί ότι έχει αμελητέα διάρκεια. Ο άξονας yy΄ είναι κατακόρυφος με φορά προς τα κάτω. Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: y=0,2.ημ($5\sqrt{2}$ t+3π/2) (S.I.))

95. Σώμα $Σ_1$ μάζας m=1 kg ισορροπεί συνδεδεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε οροφή. Βλήμα $Σ_2$ ίσης μάζας με το $Σ_1$ κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $υ_o=\sqrt{6}$ m/s, μετωπικά και πλαστικά με το σώμα $Σ_1$ τη χρονική στιγμή t_o=0.

α. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β. Μετά από πόσο χρόνο από την στιγμή της κρούσης t_o=0, η ταχύτητα του συσσωματώματος θα μηδενιστεί για πρώτη φορά;

γ. Πόσο θα είναι το έργο του βάρους στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

δ. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος:

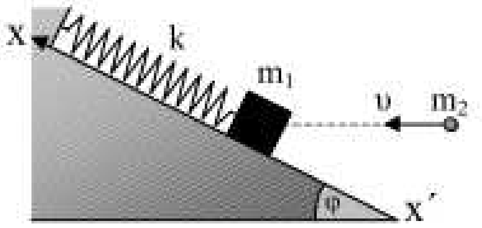
i) Αμέσως μετά την κρούση.

ii) Όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της κίνησής του.

Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

(Απ.: 0,2 m, $\sqrt{2}$ π/30 s, -2 J, -10 N, -20 N, 20 N)

96 (ΚΕΕ,ασκ.76). Από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως $\varphi=30^o$ εξαρτάται ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=100 N/m και στο κάτω ελεύθερο άκρο του συνδέεται σώμα μάζας m_1=2 kg. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας m_2=2 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ=2 m/s και συγκρούεται ακαριαία, πλαστικά με το σώμα μάζας m_1 όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Το συσσωμάτωμα δεν αναπηδά.



α. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β. Θεωρούμε αρχή μέτρησης του χρόνου t_o=0 τη στιγμή της κρούσης και άξονα x΄x με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας του. Να θεωρήσετε ότι η απομάκρυνση x για την ταλάντωση είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου.

γ. Μετά πόσο χρόνο από την στιγμή t_o=0, η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά;

δ. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος κατά την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου:

i) αμέσως μετά την κρούση,

ii) όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της κίνησής του.

Δίνεται g=10 m/s^2.

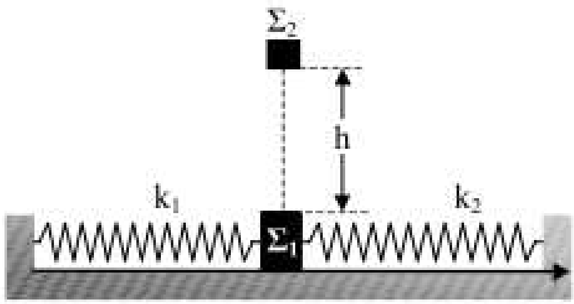
(Απ.: 0,2 m, x=0,2.ημ(5t+π/6) (S.I.), (π/15) s, -10 N, -20 N, 20 N)

97 (ΚΕΕ,ασκ.72). Το σώμα Σ_1 του παρακάτω σχήματος, μάζας m_1=1 kg, μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο και τα ελατήρια ιδανικά με σταθερές k_1=150 N/m και k_2=50 N/m. Εκτρέπουμε το σώμα Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του στη θέση Α=+0,24 m και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο. Ταυτόχρονα από ύψος h πάνω από τη θέση ισορροπίας αφήνεται να πέσει ελεύθερα σώμα Σ_2 μάζας m_2=0,44 kg.

α. Να βρείτε το ύψος h έτσι ώστε το σώμα Σ_2 να συναντήσει το Σ_1 όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του.

β. Αν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά στη θέση 0, να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος, αφού πρώτα αποδείξετε ότι θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Η διάρκεια της κρούσης είναι πάρα πολύ μικρή και η αντίσταση του αέρα αμελητέα. Δίνεται g=10 m/s^2, $\pi^2\approx10$.



(Απ.: (1/16) m, 0,2 m)

98 (YLIKONET). Ένα σώμα Σ μάζας M=9kg ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=100N/m. Από ύψος 5m πάνω από το σώμα Σ, ρίχνουμε κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $υ_ο$=10m/s ένα σώμα $Σ_1$ μάζας 1kg που σφηνώνεται στο σώμα Σ. Να βρείτε:

i) την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

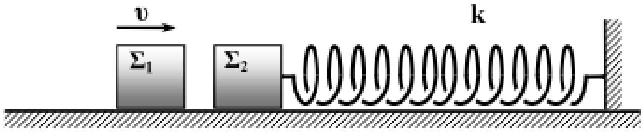
ii) το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα των δύο σωμάτων. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2.

(Απ.: $\sqrt{2}$m/s, 0,46m)

99 (YLIKONET). Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ του ακόλουθου σχήματος, έχουν ίσες μάζες $m_1=m_2=m$=9kg, το δάπεδο είναι λείο και το $Σ_2$ είναι στερεωμένο σε ελατήριο σταθεράς k=25·π²N/m και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Το $Σ_1$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα υ=3,14m/sec και συγκρούεται με το $Σ_2$. Να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν τα δύο σώματα συγκρούονται ξανά μετά από:

α) Δt = 0,6sec

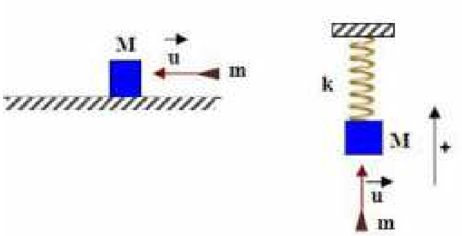
β) Δt = 0,5sec



(Απ.: 0,60m και 0,50m)

100 (YLIKONET). Ένα σώμα μάζας M ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας m, κινείται οριζόντια και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ συσσωματώματος και επιπέδου είναι μ=0,1 και το συνολικό διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι s=1,5m.

Η ίδια κρούση πραγματοποιείται με το σώμα μάζας M, δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, με το βλήμα να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο.



Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ με εξίσωση απομάκρυνσης y=A.ημ(5.t+π/6) (S.I.), θετική φορά προς τα πάνω και D=k. Αν το κλάσμα της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα ηρεμεί στιγμιαία στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του, προς την ολική ενέργεια της ταλάντωσης, ισούται με 4, να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση,

β) την μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος κατά την διάρκεια της ταλάντωσης,

γ) την τιμή του λόγου m/M,

δ) τη χρονική στιγμή που ξαναπερνά για πρώτη φορά το συσσωμάτωμα που ταλαντώνεται, από το σημείο που έγινε η κρούση,

ε) το κλάσμα της ενέργειας του βλήματος, που κατά τη στιγμή της σύγκρουσης μετατράπηκε σε ενέργεια του ταλαντωτή.

Η χρονική διάρκεια των κρούσεων θεωρείται αμελητέα.

(Απ.: $\sqrt{3}$m/s, 2 m/s, 1, (2.π/15) sec, 1/2)

101. Ένας δίσκος μάζας M=3 kg ισορροπεί δεμένος στο ελεύθερο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου με σταθερά k=300 N/m, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σταθερά στο έδαφος. Σφαίρα μάζας m=1 kg αφήνεται να πέσει από ύψος h=0,8 m πάνω από το δίσκο. Αν η κρούση μεταξύ της σφαίρας και του δίσκου είναι ελαστική, να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου μετά την κρούση. Δίνεται g=10 m/s^2.
(Απ.: 0,2 m)

102. Σώμα μάζας m_1=2 kg ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m. Από ύψος h=1,8 m πάνω από το σώμα μάζας m_1=1 kg, το οποίο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα μάζας m_1. Να βρείτε το πλάτος A της ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα μάζας m_1 μετά την κρούση. Δίνεται g=10 m/s^2.
(Απ.: 0,4 m)

103. Ένας δίσκος μάζας M=3 kg είναι στερεωμένος στο πάνω ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=300 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στο πάτωμα. Σφαίρα μάζας m=1 kg αφήνεται να πέσει από ύψος h=0,8 m πάνω από τον δίσκο. Αν η κρούση μεταξύ της σφαίρας και του δίσκου είναι κεντρική και ελαστική, να βρείτε:

i) τις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση,

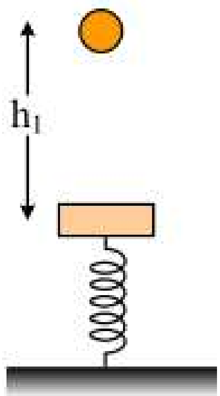
ii) τη μείωση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας κατά την κρούση. Με τι μορφής ενέργεια εμφανίζεται αυτή η μείωση;

iii) το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου,

iv) την ταχύτητα του δίσκου στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Δίνεται g=10 m/s^2.
(Απ.: 2 m/s, -2 m/s, 6 J, 0,2 m, $\sqrt{3}$m/s)

104 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Μια σφαίρα μάζας m_1=2 kg αφήνεται να πέσει από ύψος h_1 =1,25 m πάνω σε μια πλάκα, η οποία ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m, όπως στο σχήμα. Μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση η σφαίρα ανεβαίνει κατά h_2=0,45 m.



α) Βρείτε τη μάζα της πλάκας.

β) Κατά πόσο θα κατέβει η πλάκα μετά την κρούση;

γ) Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια που θα αποκτήσει το ελατήριο;

δ) Σε πόσο χρόνο, μετά την κρούση, η πλάκα θα επιστρέψει στην αρχική της θέση;

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2.
(Απ.: 8 kg, $0,2\sqrt{2}$ m , 46,1 J, 0,44 s)

105 (ΑΓΙΑΝΝΙΩΤΑΚΗ-ΑΡΧΩΝ). Ένα σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=6 kg ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=150 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Ένα άλλο σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=2 kg, που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=8 m/s κεντρικά και ελαστικά με το σώμα $Σ_1$. Μετά την κρούση το σώμα $Σ_2$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$ μετά την κρούση.

γ. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος $Σ_2$ μετά την κρούση, θεωρώντας ως χρονική στιγμή t=0 τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση και ως θετική φορά την προς τα πάνω.

δ. Να υπολογίσετε το πηλίκο της μέγιστης τιμής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου προς την μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα $Σ_2$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 4 m/s, 4 m/s, 0,8 m, $a = -20.\eta\mu 10t$ (S.I.), 2,25)

106. Σώμα μάζας M=9 kg ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m, του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο ακλόνητα. Βλήμα μάζας m=1 kg κινείται κατακόρυφα και σφηνώνεται στο σώμα μάζας M με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=10 m/s. Το συσσωμάτωμα μετά την πλαστική κρούση κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε την περίοδο T της ταλάντωσης και το πλάτος της A. Δίνεται g=10 m/s^2.

(Απ.: $\frac{\pi\sqrt{10}}{5}$s, $\frac{\sqrt{11}}{10}$)

107. Σώμα μάζας M=9 kg ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m. Από ύψος h=5 m πάνω από το σώμα αυτό ρίχνουμε κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_o$=10 m/s ένα σώμα μάζας m=1 kg, το οποίο συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M.

α. Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ. Να προσδιορίσετε την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

δ. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης.

Δίνεται g=10 m/s^2.

(Απ.: 0,2π$\sqrt{10}$ s, 0,1 m, 0,1$\sqrt{21}$ s)

108. Σώμα μάζας m=1 kg αφήνεται να πέσει από ύψος h=3,2 m πάνω από άλλο σώμα μάζας M=3 kg, που ισορροπεί στερεωμένο στο ελεύθερο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=50 N/m. Η κρούση των σωμάτων είναι πλαστική.

α. Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε το πλάτος A και την περίοδο T της ταλάντωσης.

β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση. Ποια τιμή έχει αυτός ο ρυθμός στη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου;

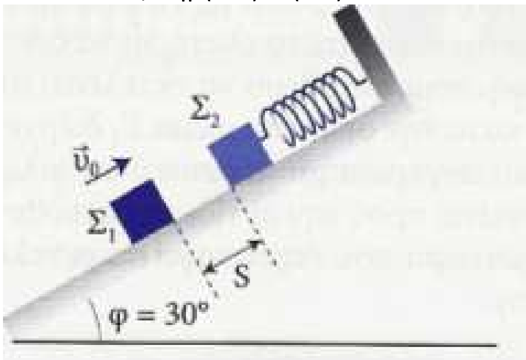
γ. Σε ποια θέση η κινητική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με την δυναμική;

Δίνεται g=10 m/s^2. Θετική φορά θεωρείται η προς τα κάτω.

(Απ.: 0,6 m, $0{,}4\pi\sqrt{2}$s, 2,5 m/s^2 -7,5 m/s^2, $\frac{3\sqrt{2}}{10}$m)

109 (ΑΓΙΑΝΝΙΩΤΑΚΗ-ΑΡΧΩΝ). Το ιδανικό ελατήριο του παρακάτω σχήματος έχει σταθερά k=100 N/m και το πάνω άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ένα σώμα $Σ_2$ μάζας m_2, το οποίο αρχικά ισορροπεί. Το σώμα $Σ_2$ μπορεί να κινείται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ=30^o. Ένα άλλο σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 εκτοξεύεται με ταχύτητα $υ_o$ παράλληλης διεύθυνσης με το κεκλιμένο επίπεδο και φοράς προς τα πάνω και, αφού διανύσει διάστημα S=1,2 m στο κεκλιμένο επίπεδο, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα $Σ_2$. Μετά την κρούση το σώμα $Σ_2$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $υ_o$ η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

x=0,1.ημ(10t) (S.I.)



Αμέσως μετά την κρούση το σώμα $Σ_1$ αρχίζει να κινείται προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου $υ_1'$=1 m/s. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση,

β. τη μάζα m_2 του σώματος $Σ_2$

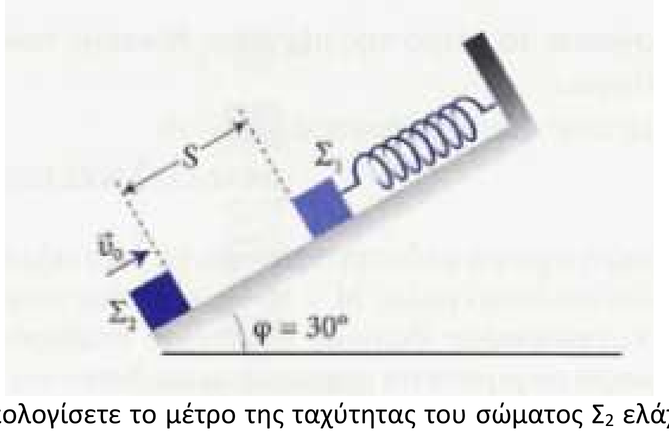
γ. τη μάζα m_1 του σώματος $Σ_1$,

δ. το μέτρο της αρχικής ταχύτητας $υ_o$ του σώματος $Σ_1$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 1 m/s, 1 kg, 0,33 kg, 4 m/s)

110 (ΑΓΙΑΝΝΙΩΤΑΚΗ-ΑΡΧΩΝ). Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας M=2 kg ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ=30^o στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m, το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα άλλο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=2 kg εκτοξεύεται από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=4 m/s, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, και αφού διανύσει διάστημα S=1,3 m στο κεκλιμένο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα $Σ_1$.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $Σ_2$ ελάχιστα πριν από την κρούση.

β. Να υπολογίσετε το ποσό θερμότητας που παράχθηκε κατά την κρούση.

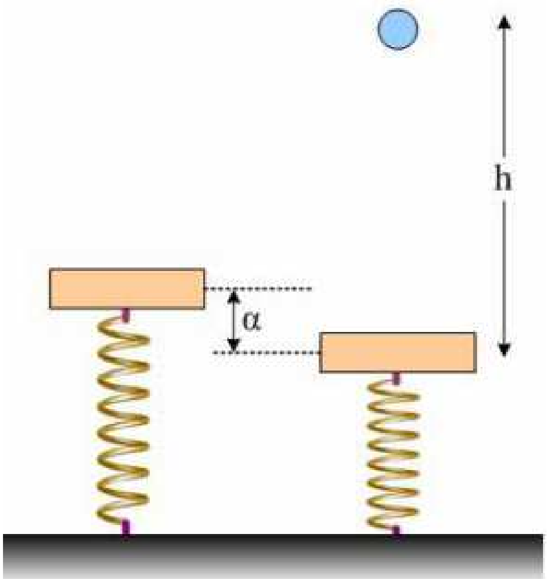
γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας του μετά την κρούση, θεωρώντας ως αρχή μέτρησης του χρόνου (t=0) τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση και ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας του σώματος $Σ_2$ ελάχιστα πριν από την κρούση.

δ. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται στιγμιαία για πρώτη φορά.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: $\sqrt{3}$ m/s , 1,5 J, $x = 0{,}2.ημ(5t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.) , $\frac{\pi}{15}$ s)

111 (ΥΛΙΚΟΝΕΤ_4.1.21). Μια πλάκα μάζας Μ= 4 kg ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k=250 N/m, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Εκτρέπουμε κατακόρυφα την πλάκα κατά α, οπότε στη θέση αυτή απέχει κατακόρυφη απόσταση h=1 m Από μια σφαίρα μάζας m_1=1 kg. Σε μια στιγμή αφήνουμε ταυτόχρονα την σφαίρα και την πλάκα να κινηθούν.



Αν τα δύο σώματα συγκρουστούν κεντρικά και ελαστικά μετά από χρονικό διάστημα 0,4 sec.

α) Οι ταχύτητες των σωμάτων ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση,

β) Η ενέργεια ταλάντωσης της πλάκας πριν και μετά την κρούση.

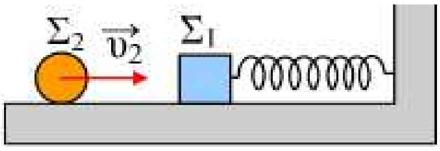
γ) Το πλάτος της νέας ταλάντωσης που εκτελεί η πλάκα μετά την κρούση.

δ) Το μέγιστο ύψος που φτάνει μετά την κρούση η σφαίρα.

Δίνεται ότι η κίνηση της πλάκας είναι απλή αρμονική ταλάντωση, $\pi^2 \approx 10$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 4 m/s, 0, -2,4 m/s, 1,6 m/s, 1,25 J και 6,37 J, 0,22 m, 0,288 m)

112 (ΜΑΡΓΑΡΗΣ). Σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=4 kg βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=2 kg κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $υ_2$=12 m/s συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το $Σ_1$, το οποίο μετά την κρούση συσπειρώνει το ελατήριο εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση και σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά μετά από χρόνο Δt=(π/20) sec.



Να υπολογίσετε:

i) Τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

ii) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας:

α) Του σώματος $Σ_2$.

β) Του συστήματος των δύο σωμάτων.

iii) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_2$ που μεταφέρθηκε στο σώμα $Σ_1$.

iv) Τη σταθερά του ελατηρίου και τη μέγιστη συσπείρωσή του.

v) Το μήκος της τροχιάς του $Σ_1$ από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=(3π/20) sec.

(Απ.: -4 m/s και 8 m/s, -128 J και 0, 88,9%, 400 N/m και 0,8 m, 2,4 m)

113* (ΥΛΙΚΟΝΕΤ). Το σώμα $Σ_2$ του σχήματος που ακολουθεί, ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο του οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m. Το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου απέχει από κατακόρυφο τοίχο απόσταση d=(8π/5) m. Το σώμα $Σ_1$ μάζας m_1, κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $υ_1$ συγκρούεται με το $Σ_2$ κεντρικά ελαστικά και μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα $υ_1'$.

Το ελατήριο προσκρούει μετά την κρούση στον τοίχο και υφίσταται μέγιστη συσπείρωση x_{max}=0,4 m. Αν το σώμα $Σ_2$ σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά σε χρόνο Δt=(9π/20) sec μετά την κρούση και $m_2=2.m_1$ να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση.

β. Τις μάζες m_1 και m_2.

γ. Τις ταχύτητες $υ_1$ και $υ_1'$.

δ. Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μετατρέπεται στιγμιαία σε μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

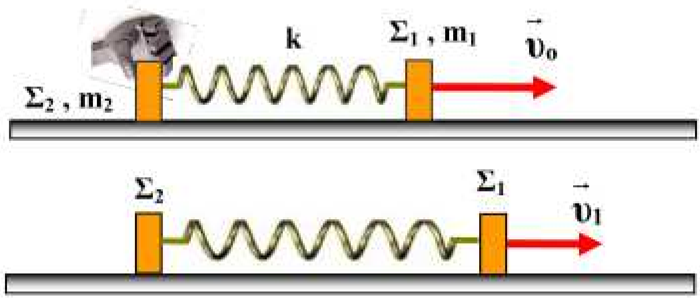
Δεχόμαστε ότι η κρούση είναι ακαριαία.

(Απ.: 4 m/s, 4 kg, 2kg, 6 m/s, -2 m/s, 8/9)

114 (YLIKONET).** Το οριζόντιο ελατήριο του σχήματος σταθεράς k=200 N/m έχει στα δύο του άκρα δεμένα δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ που έχουν μάζες m_1=2 kg και m_2=4 kg αντίστοιχα.

Τα σώματα αυτά, που μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, αρχικά ηρεμούν με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος και, με το χέρι ενός ρομπότ, να κρατά ακίνητο το $Σ_2$.

Την χρονική στιγμή t=0 εκτοξεύεται το $Σ_1$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_o = 8\sqrt{2}$ **m/s**, στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, έτσι ώστε, να απομακρύνεται από το $Σ_2$, όπως δείχνει το σχήμα.



Τη χρονική στιγμή t_1, που η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης που ακολουθεί, γίνεται ίση με την κινητική ενέργεια του Σ_1 για πρώτη φορά, αφήνεται ελεύθερο το Σ_2.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_1.

β. Κάποια χρονική στιγμή t_2 μετά την t_1, το Σ_1 σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά. Να υπολογίσετε τις τιμές που έχουν τα παρακάτω μεγέθη τη χρονική στιγμή t_2:

β1. το μέτρο της ταχύτητας Σ_2,

β2. η δυναμική ενέργεια ελατηρίου.

γ. Κάποια χρονική στιγμή μετά την t_1, τα σώματα αποκτούν για πρώτη φορά ίσες ταχύτητες. Να βρεθεί το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ_1, που είναι αποθηκευμένο τότε στο ελατήριο.

(Απ.: 8 m/s, 4 m/s, 96 J, 5/6)

Θ. ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΚΟΜΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Α.Α.Τ.

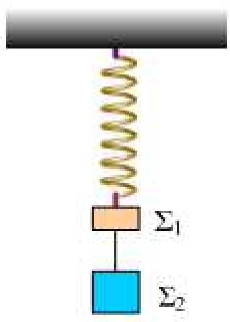
115. Το σύστημα των δύο σωμάτων του επόμενου σχήματος, με μάζες m_1=1 kg και m_2=3 kg, είναι κρεμασμένο από το ελατήριο σταθεράς k=400 N/m. Απομακρύνουμε κατακόρυφα το σώμα μάζας m_2 από την θέση ισορροπίας του κατά Δy=0,1 m και στην συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Να αποδείξετε ότι τα σώματα θα εκτελέσουν Α.Α.Τ. και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β. Να βρείτε την σταθερά επαναφοράς του κάθε σώματος χωριστά.

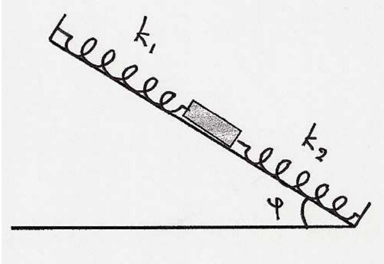
γ. Ποια σχέση δίνει την τάση T_ν του νήματος, το οποίο συνδέει τα δύο σώματα, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση των σωμάτων από την θέση ισορροπίας; Να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Δίνεται g=10 m/s^2 και θετική φορά η προς τα πάνω.



(Απ.: 0,2π s, 100 N/m και 300 N/m, T_ν=30-300.y (S.I.))

116. Ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1=2 kg ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσεως φ, δεμένο στις ελεύθερες άκρες δύο ελατηρίων με σταθερές k_1=600 N/m και k_2=200 N/m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν απομακρύνουμε το σώμα κατά 0,2 m από την θέση ισορροπίας του προς τα κάτω και στη συνέχεια την χρονική στιγμή t=0 το αφήσουμε ελεύθερο.



α. Να αποδείξετε ότι αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδό της.

β. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

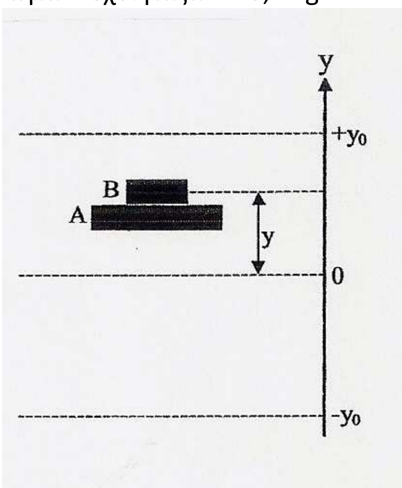
γ. Αν πάνω στο $Σ_1$ τοποθετήσουμε σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=6 kg, να γράψετε την εξίσωση που δίνει την στατική τριβή που δέχεται το $Σ_2$ από το $Σ_1$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την Θ.Ι. θεωρώντας ότι δεν αλλάζει το πλάτος ταλάντωσης.

δ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής ώστε το $Σ_2$ να μην ολισθαίνει πάνω στο $Σ_1$.

Να θεωρήσετε ότι στη θέση ισορροπίας της μάζας m και τα δύο ελατήρια είναι επιμηκυμένα και ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2 καθώς και ότι ημφ=0,6 και συνφ=0,8.

(Απ.: π/10 s, x=0,2.ημ(20.t+3π/2) (S.I.), $T_{στ}$ =36-600.x (S.I.), 3,25)

117 (ΚΕΕ, άσκηση 51). Τα δύο σώματα Α και Β που δείχνει το ακόλουθο σχήμα, είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο και εκτελούν κατακόρυφη Α.Α.Τ. με περίοδο T=2 s και πλάτος A=0,25 m. Το σώμα Β έχει μάζα m=0,2 kg.



α. Να βρείτε τη δύναμη που ασκεί το σώμα Β στο σώμα Α στις θέσεις:

i) y=0

ii) y=-0,25 m

iii)y=+0,25 m

β. Για ποια τιμή του πλάτους ταλάντωσης το σώμα Β θα εγκαταλείψει το σώμα Α, όταν η περίοδος ταλάντωσης είναι T=2s;

γ. Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα της ταλάντωσης για την οποία το σώμα Β δε θα εγκαταλείψει το σώμα Α, όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,25 m;

Δίνεται g=10 m/s^2 και π^2≈10.

(Απ.: -2 N, -2,5 N, -1,5 N, 1 m, 1 Hz)

118. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο άλλο πάνω άκρο του είναι σταθερά συνδεδεμένος δίσκος Α μάζας M=1,5 kg. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένο σώμα Β μάζας m=0,5 kg. Το σύστημα ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά A=$(\sqrt{5}/10)\mathrm{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Να δείξετε ότι το σώμα Β θα εγκαταλείψει το δίσκο Α.

β. Ποια είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Β τη στιγμή που εγκαταλείπει το δίσκο;

γ. Σε πόσο ύψος θα φτάσει το σώμα Β πάνω από την θέση στην οποία εγκαταλείπει τον δίσκο; Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και g=10 m/s^2.

(Απ.: -0,1 m, +2 m/s, -10 m/s^2, 0,2 m)

119. Σώμα μάζας M=6 kg είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=1000 N/m, και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο σώμα μάζας Μ υπάρχει σώμα μάζας m=4 kg. Απομακρύνουμε το σύστημα των σωμάτων από την θέση ισορροπίας του στην διεύθυνση του ελατηρίου και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Να βρείτε την περίοδο ταλάντωσης του συστήματος.

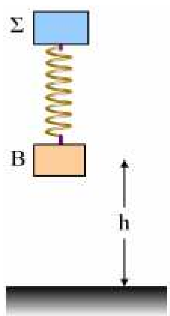
β. Αν η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων είναι $T_{στ,max}$=40N, να βρείτε το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης, ώστε το σώμα μάζας m να μην κινείται σε σχέση με το σώμα μάζας Μ, καθώς και τον συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων.

(Απ.: 0,2 π s, 0,1 m, 1)

120. Στο ακόλουθο σχήμα τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι δεμένα στα άκρα του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της κατακόρυφης δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στο σώμα μάζας m_1 προς τα κάτω, ώστε αν στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο, αυτό, ανεβαίνοντας, μόλις να ανυψώσει το σώμα μάζας m_2.

(Απ.: $(m_1+m_2).g$)

121 (YLIKONET). Τα σώματα Σ και Β αφήνονται να πέσουν ελεύθερα, δεμένα στα άκρα ενός ελατηρίου που έχει φυσικό μήκος l_o=0,8 m και σταθερά k=100 N/m. Το Β απέχει αρχικά κατά h=15 cm από το έδαφος. Η κρούση του σώματος είναι πλαστική και το σώμα κολλά στο έδαφος, ενώ το σώμα Σ που έχει μάζα m=1kg, αρχίζει να εκτελεί α.α.τ. Να βρείτε:



α. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Β.

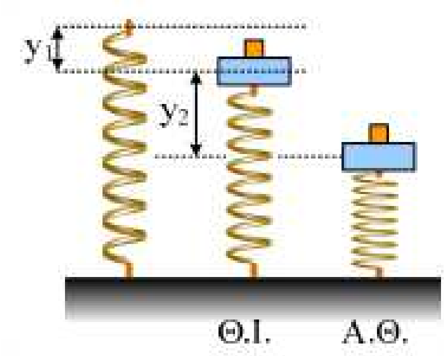
β. Την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων.

γ. Το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ τη στιγμή της ελάχιστης απόστασης.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 0,2 m, 0,5 m, -20 kg.m/s^2)]

122 (YLIKONET). Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο. Στο άλλο άκρο του συνδέεται σταθερά σώμα Α μάζας Μ=3kg. Πάνω στο σώμα Α είναι τοποθετημένο σώμα Β μάζας m=1kg και το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο από το φυσικό του μήκος κατά y_1=0,4m.



Στη συνέχεια εκτρέπουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά y_2=0,8m από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο τη χρονική στιγμή t=0.

α) Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης του συστήματος και τη σταθερά επαναφοράς D κάθε μιας μάζας ξεχωριστά.

β) Να δείξετε ότι το σώμα Β θα εγκαταλείψει το σώμα Α και να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του τότε. Δίνεται $g=10m/s^2$.

Υ.Γ. Η άσκηση αυτή είναι το 4ο θέμα των εξετάσεων με το σύστημα των δεσμών, που μπήκε την τελευταία χρονιά (το 2001) για τους παλιούς απόφοιτους. Είχε και ένα ερώτημα για ώθηση το οποίο έχει αφαιρεθεί.

(Απ.: 5rad/s, 75N/m και 25N/m, 0,4m και $2\sqrt{3}$m/s)

Ι. ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

123. Η περίοδος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης είναι Τ και το πλάτος της ακολουθεί τον εκθετικό νόμο $A=A_o.e^{-\Lambda t}$, όπου Λ σταθερή ποσότητα.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους της ταλάντωσης είναι σταθερός.

β. Μετά από N_1=18 πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $A_o/2$. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης, όταν γίνουν ακόμα N_2=72 πλήρεις ταλαντώσεις.

(Απ.: A_o/32)

124 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης ακολουθεί τον εκθετικό νόμο $A=A_o.e^{-\Lambda t}$, όπου A_o το αρχικό πλάτος και Λ=ln2 sec^{-1}.

α. Σε πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης θα γίνει $A_o/2$;

β. Αν για κάθε πλήρη ταλάντωση η επί τοις % ελάττωση της ολικής ενέργειας $E_{ολ}$ της ταλάντωσης είναι 36%, να βρείτε την επί τοις % μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης.

(Απ.: 1 sec, -20%(ελάττωση))

125. Σε ελεύθερο αρμονικό ταλαντωτή ενεργεί δύναμη αντίστασης F=-b.υ, όπου b η σταθερά απόσβεσης. Να αποδείξετε ότι:

α. Η σταθερά b έχει μονάδες kg/s.

β. Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή είναι $dE/dt=-bυ^2$.

126. Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση: $A=A_o.e^{-Λt}$. Σε χρονικό διάστημα t_1=30 s πραγματοποιούνται 40 πλήρεις ταλαντώσεις και το πλάτος γίνεται ίσο με $A_o/5$. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης αφού περάσουν άλλα 60 sec.

(Απ.: A_o/125)

127. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση όπου το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο ($A=A_o.e^{-Λt}$) τη χρονική στιγμή t_o=0 η μηχανική ενέργεια ταλάντωσης είναι E_o=100 J, ενώ τη χρονική στιγμή t_1=T είναι E_1=80 J. Να βρείτε την ενέργεια ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές t_2=2T και t_3=3T.

(Απ.: 64 J και 51,2 J)

128. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση συχνότητας f=1 Hz όπου οι δυνάμεις που αντιστέκονται στην κίνηση είναι της μορφής F΄=-b.υ το πλάτος αρχικά είναι A_o, ενώ μετά από 100 πλήρεις ταλαντώσεις γίνεται $A=A_o/2,718$. Αν ln2,718=1, να βρείτε:

α. Τη σταθερά Λ του τύπου $A=A_o.e^{-Λt}$.

β. Τη σχετική μεταβολή ΔΕ/Ε της ενέργειας της ταλάντωσης μέσα σε μια περίοδο.

(Απ.: 0,01 s^{-1}, $e^{-0,02}$-1)

129. Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά A_o=1 cm και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα πραγματοποιεί φθίνουσα ταλάντωση με περίοδο T=1 s, της οποίας το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_o.e^{-0,01t}$. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται $e^{-0,01}$=0,99 και $1+x+x^2+....\approx\frac{1}{1-x}$ για 0<x<1.

(Απ.: 4 m)

130 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Ένα κατακόρυφο ελατήριο έχει σταθερά k=80 N/m και είναι στο πάνω άκρο του συνδεδεμένο σε σταθερό σημείο. Στο άλλο άκρο του έχουμε συνδεδεμένη μάζα M=0,8 kg την οποία αφήνουμε ελεύθερη από την θέση φυσικού μήκους l_o του ελατηρίου. Μετά από κάποιον χρόνο το ελατήριο ακινητοποιείται. Αν η δύναμη που δέχτηκε το σώμα μάζας M από τον αέρα ήταν της μορφής $F_{αντ}$=-b.υ:

α. να αποδείξετε ότι το σώμα πραγματοποίησε φθίνουσα ταλάντωση και να υπολογίσετε το αρχικό της πλάτος,

β. να υπολογίσετε την θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κίνηση του σώματος,

γ. να παραστήσετε γραφικά το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Δίνεται $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 0,1 m, 0,4 J)

131. Η φθίνουσα ταλάντωση ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου περιγράφεται από την εξίσωση x=A.συνωt, όπου $A=A_o.e^{-Λ.t}$. Στο σύστημα ενεργεί δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας, δηλαδή F΄=-b.υ.

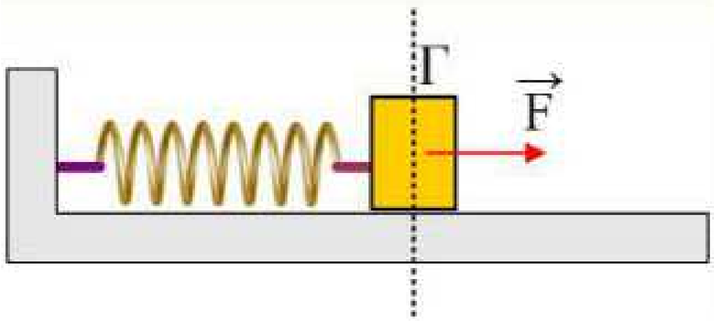
α. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση x=f(t) (ποιοτικό διάγραμμα).

β. Αν για την ταλάντωση αυτή δεχτούμε ότι ω= $\sqrt{k/m}$, να αποδείξετε ότι:

i) η ολική ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή E= $\frac{1}{2}.k.A_o^2.e^{-2\Lambda t}$,

ii) ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών της ολικής ενέργειας είναι ίσος με $\frac{E_k}{E_{k+1}} = e^{2\Lambda t}$.

132 (YLIKONET). Ένα σώμα μάζας 2 kg ηρεμεί στο σημείο Γ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=200 N/m. Σε μια στιγμή t=0 το σώμα δέχεται την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης F=40 N, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



α) Να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. και να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσής της με τον χρόνο, θεωρώντας θετική κατεύθυνση την προς τα δεξιά.

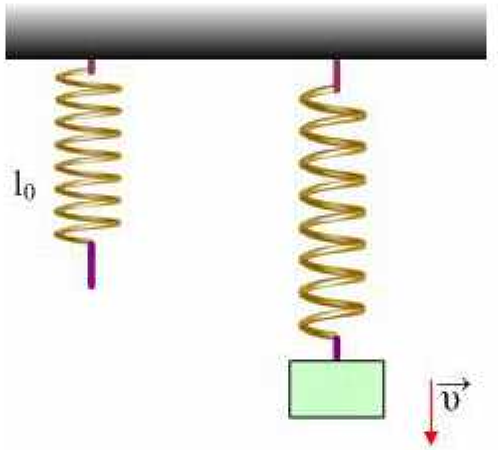
β) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης F κατά την πρώτη περίοδο της ταλάντωσης και πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης;

γ) Να γίνει το διάγραμμα της απόστασης s του σώματος από την αρχική θέση ηρεμίας του Γ, σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Αν η ταλάντωση του σώματος είναι φθίνουσα, εξαιτίας μικρών αποσβέσεων, να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα της απόστασης s σε συνάρτηση με το χρόνο. Τι ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης F αποθηκεύεται τελικά στο σύστημα;

(Απ.: x=0,2.ημ(10.t+3π/2) (S.I.), 0 και 4 J αντίστοιχα, s=0,2+0,2.ημ(10.t+3π/2) (S.I.), 50%)

133 (YLIKONET). Το ελατήριο του ακόλουθου σχήματος έχει σταθερά k=100 N/m και κρέμεται κατακόρυφα έχοντας φυσικό μήκος l_o=0,5 m. Δένουμε στο κάτω άκρο του ελατηρίου ένα σώμα μάζας 2 kg και το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε αυτό εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, εξαιτίας της αντίστασης του αέρα, η οποία είναι της μορφής F΄=-b.υ. Σε κάποια στιγμή t_1 το σώμα κινείται προς τα κάτω και το ελατήριο έχει μήκος l_1=0,8 m. Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα $υ_1$=0,8 m/s, ενώ επιβραδύνεται με ρυθμό 5,2 m/s^2.



Να βρείτε:

α) Τη μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμική, στο διάστημα 0 ως t_1.

β) Τη μείωση της ενέργειας ταλάντωσης.

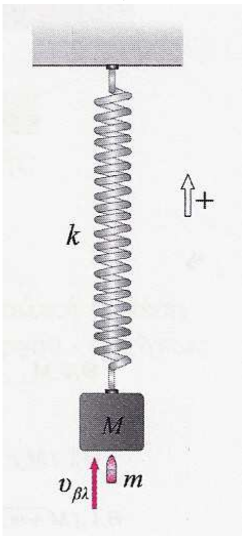
γ) Τη σταθερά απόσβεσης b.

δ) Το ρυθμό μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 0,86 J, 0,86 J, 0,5 kg/sec, +0,32 J/sec)

134 (Νικολακόπουλος, άσκηση 29). Σώμα μάζας Μ στερεώνεται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Το σώμα μάζας Μ αρχικά ισορροπεί. Ένα βλήμα με μάζα m=M/4 κινείται προς τα πάνω στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και η κινητική του ενέργεια ελάχιστα πριν την κρούση είναι $K_{βλ}=500$ J. Το βλήμα σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα μάζας Μ και το συσσωμάτωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Στο συσσωμάτωμα ασκείται από τον αέρα μια δύναμη αντίστασης της μορφής F΄=-b.υ (S.I.) με $b = 0.1.\sqrt{10}$ kg.s^{-1}. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι να ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα είναι -4,5 J. Θετική φορά να θεωρηθεί η προς τα πάνω.



Να βρεθούν:

α. η θερμότητα που παράγεται κατά την πλαστική κρούση,

β. το έργο της δύναμης F΄ στο χρονικό διάστημα από τη δημιουργία του συσσωματώματος μέχρι να ακινητοποιηθεί αυτό,

γ. οι μάζες m και Μ, καθώς και η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, δ. η επιτάχυνση του συσσωματώματος αμέσως μετά την δημιουργία του,

ε. ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας αμέσως μετά την κρούση,

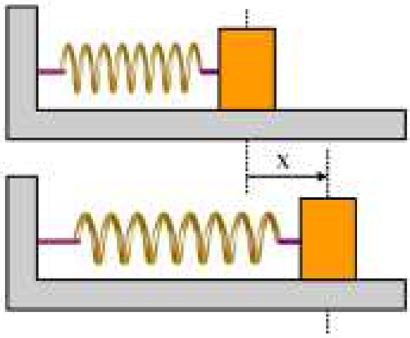
στ. η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση αν η θερμότητα που παράγεται κατά τη φθίνουσα ταλάντωση είναι 150,5 J,

ζ. η σχέση των μαζών M και m όταν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος ελάχιστα πριν τη κρούση που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση είναι 90%.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\ m/s^2$.

(Απ.: 400 J, -100,5 J, 4 kg, 1kg και $2.\sqrt{10}$ m/s, -2,4 m/s², $4.\sqrt{10}$ J , 750 J, M=9.m)

135 (YLIKONET). Ένα σώμα Σ μάζας 2 kg ηρεμεί, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=40 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο όπως στο σχήμα που ακολουθεί.



Εκτρέπουμε το σώμα προς τα δεξιά κατά A_o και την χρονική στιγμή $t_o=0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Η ταλάντωση, λόγω των αντιστάσεων του αέρα, είναι φθίνουσα και η δύναμη αντίστασης είναι της μορφής $F'=-0{,}2.\upsilon$ (S.I.). Για τη χρονική στιγμή που το σώμα κατευθύνεται για πρώτη φορά προς τη θέση ισορροπίας του, απέχοντας κατά 0,1 m από αυτή και έχοντας ταχύτητα μέτρο 5 m/s ζητούνται:

α. ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης,

β. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος,

γ. η ισχύς της δύναμης απόσβεσης. Τι εκφράζει η ισχύς αυτή;

(Απ.: -20 J/s, 15 J/s, -5 W)

ΙΑ. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ – ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

136 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Στο ένα άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατήριου σταθεράς k=100 N/m είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας m=1 kg, το οποίο μπορεί να κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, κατά $A_o=0{,}2$ m και το αφήνουμε ελεύθερο. Λόγω τριβών, το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται κατά 2% μετά από κάθε πλήρη ταλάντωση.

α. Ποια είναι η ιδιοσυχνότητα f_o του ταλαντωτή;

β. Πόση ενέργεια αφαιρείται από τον ταλαντωτή μέσω του έργου των τριβών στην διάρκεια της πρώτης περιόδου;

γ. Πόση ενέργεια πρέπει να μεταφερθεί στον ταλαντωτή, μέσω του έργου εξωτερικής περιοδικής δύναμης, σε χρόνο t=62,8 s, ώστε να εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις με συχνότητα f_o.

(Απ.: (5/π) Hz, 0,0792 J, 7,92 J)

137 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Ένας ταλαντωτής με μάζα m=4 kg, σταθερά επαναφοράς D=100 N/m και σταθερά απόσβεσης b=0,4 kg/s εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της ελεύθερης και της αμείωτης ταλάντωσης του. Αν το πλάτος ταλάντωσης είναι Α=0,8 m και η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας, να γράψετε τη σχέση που δίνει την εξωτερική περιοδική δύναμη σε συνάρτηση με τον χρόνο και να κάνετε την αντίστοιχα γραφική παράσταση.
(Απ.: 1,6συν5t (S.I.))

138. Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m εξαρτάται σώμα Σ μάζας m=1 kg, από το οποίο προσδένεται με λεπτό άκαμπτο σύρμα μια μεταλλική πλάκα αμελητέου όγκου, η οποία είναι βυθισμένη σε υγρό. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι σταθερά στερεωμένο. Ανυψώνουμε το σώμα Σ κατακόρυφα ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και την χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο. Η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος είναι της μορφής F=-b.υ όπου b=0,63 kg/s. Το σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και μετά από 7 πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος μειώνεται στο ¼ της αρχικής του τιμής.

α. Να γράψετε την εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να βρείτε την ενέργεια που πρέπει να προσφέρεται στο σύστημα ανά περίοδο, με την βοήθεια κάποιας διεγείρουσας εξωτερικής δύναμης, ώστε το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης να διατηρείται σταθερό.

Δίνονται: Λ=b/2m, g=10 m/s^2 και ln2=0,693
(Απ.: 0,1. $e^{-0,315.t}$ (S.I.), π.A^2.b.ω=0,198 J)

139. Ένα σώμα μάζας M=2 kg είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς αποσβέσεις με τη βοήθεια του τροχού, ο οποίος περιστρέφεται με συχνότητα f_1=(3/2π) Hz. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=0,1 m.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας μηδέν την αρχική φάση της ταλάντωσης.

β. Αν διπλασιάσουμε τη συχνότητα περιστροφής του τροχού, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα μείνει αμετάβλητο;
(Απ.: x=0,1ημ(3t), θα αυξηθεί)

140. Κρατάμε με το χέρι μας το ένα άκρο ενός ελατηρίου, στο άλλο άκρο του οποίου είναι κρεμασμένο ένα σώμα μάζας m=0,5 kg. Αρχίζουμε να κουνάμε το χέρι μας πάνω κάτω με διάφορες συχνότητες και παρατηρούμε ότι όταν η συχνότητα κίνησης του χεριού μας είναι f=2 Hz, το πλάτος ταλάντωσης του σώματος είναι μέγιστο. Να βρείτε τη σταθερά k του ελατηρίου. Η επίδραση της αντίστασης του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.
(Απ.: 8π^2 N/m)

141 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένες αρμονικές ταλαντώσεις υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης της μορφής F=2$\sqrt{2}$συν8t (S.I.). Αν η σταθερά απόσβεσης είναι b=2 kg/s, να βρείτε:

α. Τη σχέση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β. Την ενέργεια που μεταφέρεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη σε μία περίοδο.
(Απ.: ($\sqrt{2}$/8).ημ8t (S.I.), 0,5π J)

142. Ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση και η απομάκρυνση του δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο από τη σχέση x=10ημ20t (x σε m, t σε s). Η δύναμη F΄ που αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος δίνεται από τη σχέση F΄=-2υ (F΄σε N, υ σε m/s). Να βρείτε το έργο που παράγει η F΄ σε χρόνο t=π s.
(Απ.: 4π.10^4 J)

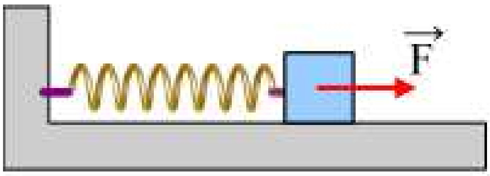
143 (Σαββάλας). Από έναν οριζόντιο δρόμο πέρασε μια μπουλντόζα, η οποία άφησε ίχνη με μορφή υψωμάτων και κοιλωμάτων. Δύο διαδοχικά κοιλώματα απέχουν μεταξύ τους α=6,28 cm. Στη συνέχεια πέρασε από τον ίδιο δρόμο δίτροχη άμαξα συνολικής μάζας M=200 kg, που έχει ελατήρια με συνολική σταθερά k=80000 N/m.

α. Πόση είναι η ιδιοπερίοδος της άμαξας;

β. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί η άμαξα, ώστε το πλάτος ταλάντωσης της να γίνει μέγιστο;

(Απ.: (π/10) s, 0,2 m/s)

144 (YLIKONET). Ένα σώμα μάζας m=2 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στην άκρη οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k=648 N/m, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σε μια στιγμή δέχεται περιοδική οριζόντια δύναμη F, με αποτέλεσμα να αρχίζει να ταλαντώνεται. Μόλις αποκατασταθεί σταθερή κατάσταση, λαμβάνοντας κάποια στιγμή σαν χρονική t=0, βρίσκουμε ότι το σώμα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης:

x=0,4.ημ20t (S.I.)

γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του. Στη διάρκεια της ταλάντωσής του το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης της μορφής F΄=-4.υ (S.I.), όπου υ η ταχύτητα του σώματος.

α. Να βρεθούν η ιδιοσυχνότητα και η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος.

β. Για τη χρονική στιγμή t_1=π/4 sec ζητούνται:

i) η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης,

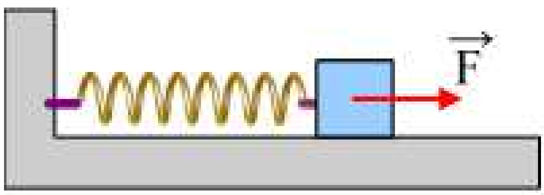
ii) οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας,

iii) ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης,

iv) ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης F.

(Απ.: $\frac{9}{\pi}$ Hz και $\frac{10}{\pi}$ Hz , 64 J και 0 J, 0 J/s και οι δύο ρυθμοί, 256 J/s, 256 J/s)

145 (YLIKONET). Ένα σώμα μάζας 2 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=180 N/m. Ασκούμε πάνω του μια περιοδική οριζόντια δύναμη, υποχρεώνοντάς το να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση, με την δύναμη απόσβεσης να είναι της μορφής $F_{απ}$=-b.υ.



Μόλις σταματήσουν τα μεταβατικά φαινόμενα το σώμα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος A=0.2 m. Θεωρώντας ως χρονική στιγμή t=0, τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, βρίσκουμε ότι η εξωτερική δύναμη δίνεται από την εξίσωση:

$$F=4.\sqrt{2}.\eta\mu(10t+3\pi/4) \text{ (S.I.)}$$

α. Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης με τον χρόνο.

β. Να βρεθεί η δύναμη απόσβεσης τη χρονική στιγμή t=0, καθώς και η σταθερά απόσβεσης b.

γ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{7.\pi}{40}\,\mathbf{sec}$ να βρεθούν:

i) ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας,

ii) ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας,

iii) ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα λόγω της ύπαρξης των αποσβέσεων,

iv) ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σώμα, μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης.

δ. Ποιες είναι οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30}\,\mathbf{sec}$;

ε. Αν μεταβάλουμε τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης στην τιμή f_2=2 Hz, τι θα συμβεί με το πλάτος της ταλάντωσης, μετά την αποκατάσταση των μεταβατικών φαινομένων και την σταθεροποίηση του πλάτους;

Δίνεται $\eta\mu\frac{\pi}{12} \approx 0,26$.

(Απ.: x=0,2.ημ(10.t) (S.I.) κ.ο.κ., 4 N και 2 kg/s, -36 J/s, 40 J/s, -4 W, 8 W, $\mathbf{18\sqrt{3}}$ J/s, $\mathbf{-20\sqrt{3}}$ J/s, -2 W, -1,45 W, το πλάτος μειώνεται)

<u>ΙΒ. ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ</u>

146. Μικρό σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας πάνω στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις x_1=4συν2t και x_2=4συν(2t+π/3). Το x μετριέται σε cm και το t σε s. Να υπολογίσετε:

α. Την εξίσωση της κίνησης.

β. Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος την χρονική στιγμή t=(π/4) s.

(Απ.: 0,04$\sqrt{3}$ συν(2t+π/6) (S.I.), -12 cm και -8$\sqrt{3}$ cm/s^2)

147. Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις

x_1=2ημ(πt+π/2) και x_2=2ημ(πt+π/6) (x σε cm και t σε s)

ίδιας διεύθυνσης και με την ίδια θέση ισορροπίας. Να βρείτε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

(Απ.: 0,02$\sqrt{3}$ ημ(πt+π/3) (S.I.))

148. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

x_1=4ημ100πt και x_2=3ημ(100πt+π/2) (x_1,x_2 και cm, t και s) ίδιας διεύθυνσης και ίδιας θέσης ισορροπίας.

α. Να κάνετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις των απομακρύνσεων των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος όταν αυτό εκτελεί τη συνισταμένη ταλάντωση.

(Απ.: 0,05.ημ(100πt+θ) με εφθ=3/4, 5π.ημ(100πt+θ), -500π^{2}ημ(100πt+θ) (S.I.))

149. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση με εξισώσεις

x_1=0,01ημ2πt και x_2=0,01ημ(2πt+π/3) (x_1,x_2 και m, t και s)

α. Ποια είναι η περίοδος της συνισταμένης ταλάντωσης;

β. Να βρείτε το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης του σώματος και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης.

(Απ.: 1 s, 0,01 $\sqrt{3}$ ημ(2πt+π/6) (S.I.))

150. Σώμα μάζας m=1 kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

x_1=10ημ(3πt+π/3) και x_2=10ημ(3πt-π/6) (x_1,x_2 και cm, t και s)

της ίδιας διεύθυνσης και με την ίδια θέση ισορροπίας. Να βρείτε:

α. Την διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.

β. Την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ. Την σταθερά D της ταλάντωσης.

δ. Την εξίσωση της συνιστάμενης δύναμης που δέχεται το σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.

(Απ.: π/2, $0{,}1\sqrt{2}$.ημ(3πt+π/12) (S.I.), 9π^2 N/m, -0,9 $\sqrt{2}$ π^{2}ημ(3πt+π/12) (S.I.))

151 (Σαββάλας). Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τρεις απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

x_1=10ημωt, x_2=30ημ(ωt+π/2), x_3=A_3ημ(ωt+3π/2) (x_1,x_2, x_3 και cm, t και s)

ίδιας διεύθυνσης και με την ίδια θέση ισορροπίας. Να γράψετε την εξίσωση της συνιστάμενης ταλάντωσης όταν:

α. A_3=30 cm β. A_3=20 cm

(Απ.: 0,1.ημωt, 0,1. $\sqrt{2}$ ημ(ωt+π/4) (S.I.))

152. Δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις έχουν πλάτη A_1=10 cm και A_2=8 cm και πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Αν οι ταλαντώσεις αυτές έχουν ίσες συχνότητες, την ίδια διεύθυνση, την ίδια θέση ισορροπίας και το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης είναι A=14 cm, πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ τους;

(Απ.: συνφ=1/5)

153 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης και ίδιας θέσης ισορροπίας με εξισώσεις:

$x_1 = 0{,}2.\eta\mu(40.\mathbf{t})$ και $x_1 = A_2.\eta\mu(40.\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi})$ (S.I.)

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης x_1 είναι E_1=8 J, της ταλάντωσης x_2 είναι E_2=2 J και της συνιστάμενης ταλάντωσης είναι E=6 J. Να βρείτε:

α. τη σταθερά D της κάθε ταλάντωσης, το πλάτος A_2, καθώς και το πλάτος A της συνιστάμενης ταλάντωσης,

β. τη διαφορά φάσης φ των δύο ταλαντώσεων,

γ. την συνάρτηση της συνιστάμενης ταλάντωσης.

(Απ.: 400 N/m, 0,1 m και $0{,}1\sqrt{3}$ m , 2π/3, $x = 0{,}1\sqrt{3}.\eta\mu(40.t + \pi/6)$ (S.I.))

154. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις

x_1=5ημ1004πt και x_2=5ημ1000πt (x_1,x_2 και cm, t και s)

Οι δύο ταλαντώσεις έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια θέση ισορροπίας.

α. Ποια είναι η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης;

β. Ποια είναι η περίοδος και ποια η συχνότητα της συνιστάμενης κίνησης;

γ. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πλάτους της συνισταμένης κίνησης και τη συχνότητα της αυξομείωσης του πλάτους (συχνότητα του διακροτήματος).

(Απ.: 0,1.συν2πt.ημ1002πt (S.I.), (1/501) s, 10 cm και 2 Hz)

155 (YLIKONET). Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

y_1=4.ημ(4π.t+2π/3) (S.I.), y_2=4.ημ(4π.t+π/6) (S.I.)

i) Ποιες οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων;

ii) Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους;

iii) Βρείτε την εξίσωση y=f(t) για την απομάκρυνση του υλικού σημείου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

(Απ.: 2 Hz, π/2, υ= 4.$\sqrt{2}$.ημ(4π.t+5π/12) (S.I.))

156 (YLIKONET). Ένα σώμα μάζας 2kg ταλαντώνεται με εξίσωση:

$y = (2 + 2\sqrt{3}).\sigma\upsilon\nu(4\pi\mathbf{t}) + \mathbf{2\sqrt{6}}.\eta\mu(4\pi.\mathbf{t - \pi/4})$ (y σε cm, t σε sec)

i) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι γραμμική αρμονική συνάρτηση του χρόνου (Γ.Α.Τ.) και να υπολογίσετε το πλάτος και την αρχική της φάση.

ii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=0,5s.

iii) Να βρεθούν οι δύο πρώτες χρονικές στιγμές που το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας.

(Απ.: y=4.ημ(4π.t+π/6) (y σε cm, t σε sec), -6,4 kg.m/sec, $\frac{5}{24}$sec και $\frac{11}{24}$sec)

157. Ένα διακρότημα προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, που έχουν ίδια διεύθυνση, ίδιο πλάτος A=10 cm και συχνότητες f_1=200 Hz και f_2=202 Hz.

α. Να βρείτε την εξίσωση του πλάτους και την περίοδο του διακροτήματος.

β. Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος και η συχνότητα της συνιστάμενης ταλάντωσης.

(Απ.: 20συν(2πt) (S.I.) και 0,5 s, 20 cm και 201 Hz)

158. Από δύο διαφορετικές μουσικές πηγές παράγονται δύο απλοί ήχοι με συχνότητες f_1=2000 Hz και f_2=1998 Hz. Το αυτί ενός ανθρώπου αντιλαμβάνεται έναν ήχο ο οποίος άλλοτε ΄΄σβήνει΄΄ και άλλοτε αποκτά μέγιστη ένταση. Να υπολογιστεί το ελάχιστο χρονικό διάστημα μεταξύ ενός μηδενισμού της έντασης του ήχου και μιας μεγιστοποίησης αυτού.

(Απ.: 0,25 s)

159. Η περίοδος ενός διακροτήματος που προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων είναι $T_δ$=10 s. Αν η μεγαλύτερη από τις δύο συχνότητες των ταλαντώσεων είναι 150,1 Hz, να βρείτε τη μικρότερη.
(Απ.: 150 Hz)

160. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο και με κυκλικές συχνότητες $ω_1$= 2π rad/s και $ω_2$=2,01π rad/s. Να βρείτε τη συχνότητα και την περίοδο του διακροτήματος που προκύπτει.
(Απ.: 0,005 Hz, 200 s)

161. Δύο διπλανά πλήκτρα ενός πιάνου εκπέμπουν ήχους με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα f=600 Hz. Να βρείτε πόση πρέπει να γίνει η συχνότητα του ενός, ώστε, όταν δονούνται ταυτόχρονα, να ακούμε έξι μέγιστα του ήχου στο δευτερόλεπτο.
(Απ.: 594 Hz ή 606 Hz)

162. Οι ήχοι από δύο διαπασών έχουν την ίδια ένταση και οι συχνότητές τους είναι f_1=10000 Hz και f_2=10010 Hz. Αν τα διαπασών βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο, να βρείτε:

α. Την περίοδο του ήχου που ακούμε.

β. Πόσα μέγιστα του ήχου ακούμε σε χρόνο t=2 s.

(Απ.: (1/10005) s, 20 μέγιστα)

163 (ΣΑΒΒΑΛΑΣ). Ένα διαπασών άγνωστης συχνότητας και ένα πρότυπο διαπασών συχνότητας f=404 Hz εκπέμπουν ταυτόχρονα ήχους, οπότε παρατηρούνται τρία μέγιστα του ήχου σε κάθε δευτερόλεπτο. Η συχνότητα του διακροτήματος μικραίνει όταν ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης τοποθετηθεί στο ένα σκέλος του πρώτου διαπασών. Να βρείτε την συχνότητα του διαπασών αυτού.
(Απ.: 407 Hz)

164. Δύο χορδές X_1 και X_2 παράγουν δύο κοντινούς ήχους ίδιας έντασης με διαφορετικές συχνότητες f_1 και f_2 αντίστοιχα. Ένα διαπασών συνηχεί χωριστά με την X_1 και χωριστά με την X_2. Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι ίδια και ίση με $f_δ$=2Hz.

α. Ποια είναι η συχνότητα των διακροτημάτων όταν συνηχούν οι χορδές X_1 και X_2.

β. Αν η συχνότητα του διαπασών είναι $f_Δ$=365 Hz, ποια είναι η συχνότητα του ήχου που παράγει κάθε χορδή;

(Απ.: 4 Hz, 363 Hz ή 367 Hz)

165 (YLIKONET). Διαθέτουμε δύο ηχητικές πηγές που παράγουν απλούς αρμονικούς ήχους με συχνότητες f_1 και f_2 . Οι δυο πηγές παράγουν ήχους ίδιας έντασης, πράγμα που σημαίνει ότι, όταν ο κάθε ήχος πέσει στο τύμπανο του αυτιού μας, το εξαναγκάζει να ταλαντωθεί με το ίδιο πλάτος. Έστω ότι η ταλάντωση του τύμπανου εξαιτίας του πρώτου ήχου έχει απομάκρυνση:

$$x_1=0{,}002.ημ(20000π.t+π)\ (S.I.),$$

ενώ εξαιτίας του δεύτερου ήχου:

$$x_2=0{,}002\cdot ημ(20004π.t)\ \ (S.I.),$$

i) Να βρεθούν οι συχνότητες των δύο ήχων.

ii) Να βρεθεί η διαφορά φάσης $Δφ_{21}$= $φ_2$-$φ_1$ μεταξύ των δύο απομακρύνσεων σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του τύμπανου του αυτιού μας σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Ποια είναι η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβανόμαστε;
v) Πόσα μέγιστα της έντασης του ήχου αντιλαμβανόμαστε σε κάθε δευτερόλεπτο;

Δίνεται ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός: $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2.\sigma\upsilon\nu\frac{\boldsymbol{\alpha}\text{ - }\boldsymbol{\beta}}{2}.\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$

(Απ.: 10000 Hz και 10002 Hz, 4πt-π (S.I.), x=0,004.συν(2πt-π/2).ημ(20002πt+π/2) (S.I.), 10001 Hz, 2 Hz)

166 (YLIKONET). Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ. που πραγματοποιούνται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και με εξισώσεις αντίστοιχα:

y_1=0,2.ημ(60πt) y_2=0,2.ημ(62πt-π/2) (S.I.)

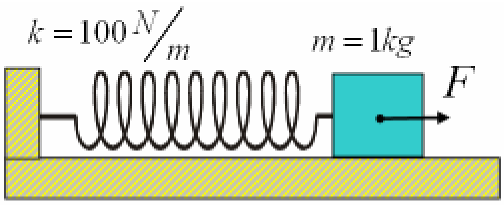
α. Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.
β. Ποιο το πλάτος και ποια η απομάκρυνση τη χρονική στιγμή t=0;

Δίνεται ο τριγωνομετρικός μετασχηματισμός: $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2.\sigma\upsilon\nu\frac{\boldsymbol{\alpha}\text{ - }\boldsymbol{\beta}}{2}.\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$.

(Απ.: y=0,4.συν(πt-π/4).ημ(61πt-π/4) (S.I.), $\mathbf{0{,}2.\sqrt{2}\ m}$,-0,2 m)

ΙΓ. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

167 (**YLIKONET).** Το σώμα του σχήματος που ακολουθεί, βρίσκεται πάνω σε λεία σανίδα, συνδεδεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου. Δεχόμενο περιοδική δύναμη F εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με πλάτος 0,2 m και κυκλική συχνότητα ω=5 rad/sec. Δέχεται επίσης δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{αντ}$=- $2\sqrt{3}$.υ (S.I.), όπου υ η ταχύτητά του. Κάποια στιγμή μετά την σταθεροποίηση του πλάτους βρίσκεται στη θέση 0,1 m και πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας.



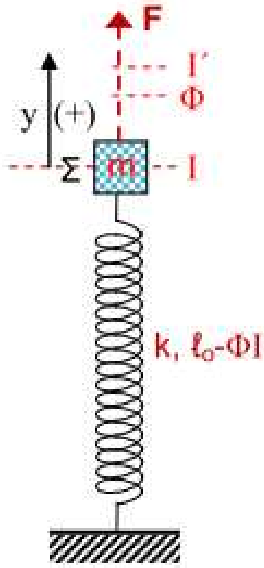
α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα και τη δύναμη απόσβεσης εκείνη τη χρονική στιγμή.
β. Να υπολογίστε την επιτάχυνση και τη δύναμη του διεγέρτη εκείνη τη χρονική στιγμή.
γ. Με ποιο ρυθμό προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα εκείνη τη χρονική στιγμή;
δ. Ποιος είναι την ίδια χρονική στιγμή, ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου;
ε. Ποιος είναι επίσης την ίδια χρονική στιγμή, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος και ποιος ο ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω αντίστασης;

(Απ.: +3N, -2,5 m/s^2 και +4,5 N, $\mathbf{-2{,}25\sqrt{3}\ J/s}$, $\mathbf{-5\sqrt{3}\ J/s}$, $\mathbf{1{,}25\sqrt{3}\ J/s}$, $\mathbf{1{,}5\sqrt{3}\ J/s}$)

168 (ΤΖΑΝΟΠΟΥΛΟΣ). Το σώμα Σ του ακόλουθου σχήματος ισορροπεί αρχικά στη θέση (Ι). Το ελατήριο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Κάποια στιγμή (t=0) εφαρμόζουμε πάνω του μια κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη F, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$F = \frac{10}{3}.y + 10 \quad \text{(S.I.)}$$

όπου y η απόσταση του σώματος από την Θ.Ι. (Ι). Το σώμα αρχίζει να ανεβαίνει.



Α. Να δείξετε ότι υπάρχει μια θέση (Ι΄) πάνω από τη θέση (Ι), όπου η συνισταμένη όλων των δυνάμεων, συμπεριλαμβανομένης και της F είναι μηδέν, και ότι η θέση αυτή είναι η Θ.Ι. μιας Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το σώμα.

Β. Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα αποκτήσει για πρώτη φορά μέγιστη κινητική ενέργεια και πόση είναι αυτή;

Γ. Κάποια στιγμή διακόπτουμε την εφαρμογή της δύναμης F. Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει στη συνέχεια το σώμα Σ αν η δύναμη F πάψει να εφαρμόζεται τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από:

i) Την πάνω ακραία θέση του.

ii) Τη θέση Φ.

iii) Τη θέση Ι.

(Απ.: $0{,}05\pi\sqrt{10}$ sec και 5 J, 2 m, 1,125 m και ακίνητο)

169. Σώμα μάζας m=1 kg ισορροπεί στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=100 N/m, στην θέση x=0 του οριζόντιου άξονα xx΄. Στο σώμα ασκείται εξωτερική οριζόντια μεταβλητή δύναμη της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με την θέση σύμφωνα με την εξίσωση:

F=400.x (S.I.)

Η εξωτερική αυτή δύναμη ασκείται μέχρι την θέση x=0,25 m και στην συνέχεια την χρονική στιγμή t=0 καταργείται με αποτέλεσμα το σώμα να εκτελέσει Α.Α.Τ.. Να βρείτε:

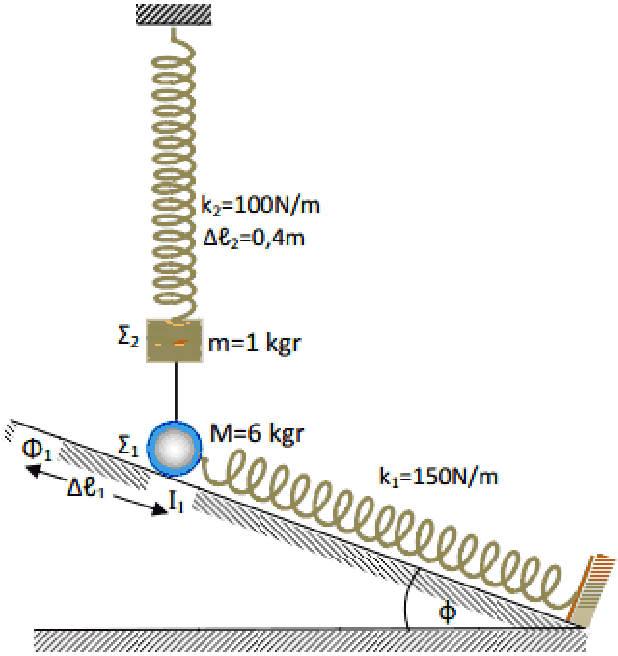
α. Την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης.

γ. Τις εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο. Να θεωρήσετε την κατεύθυνση της δύναμης F θετική.

(Απ.: 12,5 J, 0,5 m, 0,5.ημ(10.t+π/6), 5.συν(10.t+π/6) και -50.ημ(10.t+π/6) (S.I.))

170 (ΤΖΑΝΟΠΟΥΛΟΣ). Τα δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ του ακόλουθου σχήματος με μάζες M=6 kg και m=1 kg αντίστοιχα, ισορροπούν δεμένα μεταξύ τους με ένα τεντωμένο, κατακόρυφο αβαρές σχοινί. Το καθένα είναι στερεωμένο στο άκρο ενός ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο ελατήρια έχουν σταθερές k_1=150 N/m και k_2=100 N/m και οι θέσεις ισορροπίας των κέντρων των δύο σωμάτων βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφο. Το πάνω ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά 0,4 m.



α. Να βρείτε την παραμόρφωση $\Delta\ell_1$ του κάτω ελατηρίου.

β. Κάποια στιγμή (t=0) κόβουμε το σχοινί και τα δύο σώματα αρχίζουν να εκτελούν Α.Α.Τ. Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης κάθε συστήματος ΄΄ελατηρίου-μάζας΄΄;

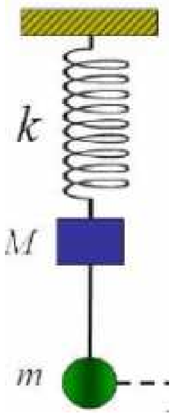
γ. Ποια χρονική στιγμή, μετά την έναρξη της ταλάντωσης, θα βρεθούν τα κέντρα των δύο σωμάτων για πρώτη φορά στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση;

δ. Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται, την παραπάνω χρονική στιγμή, η ορμή κάθε σώματος;

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2 και ημφ=0,5.

(Απ.: 0,1 m, 0,75 J και 4,5 J, 1,256 sec, 15 N και 30 N)

171. Το σύστημα των δύο σωμάτων του επόμενου σχήματος, με μάζες M=3 kg και m=1 kg, είναι κρεμασμένο από το ελατήριο σταθεράς k=100 N/m. Απομακρύνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω, το σώμα μάζας m_2 από την θέση ισορροπίας του κατά Δy=0,2 m και στην συνέχεια, την χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.



α. Να αποδείξετε ότι τα σώματα θα εκτελέσουν Α.Α.Τ. και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β. Να βρείτε την σταθερά επαναφοράς του κάθε σώματος χωριστά.

γ. Ποια σχέση δίνει την τάση T_v του νήματος, το οποίο συνδέει τα δύο σώματα, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση των σωμάτων από την θέση ισορροπίας; Να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

δ. Ποια σχέση δίνει την τάση $T_ν$ του νήματος, το οποίο συνδέει τα δύο σώματα, σε συνάρτηση με τον χρόνο; Να κάνετε επίσης την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

ε. Πόσο πρέπει να είναι το πλάτος της ταλάντωσης, ώστε το νήμα να πάψει να είναι τεντωμένο;

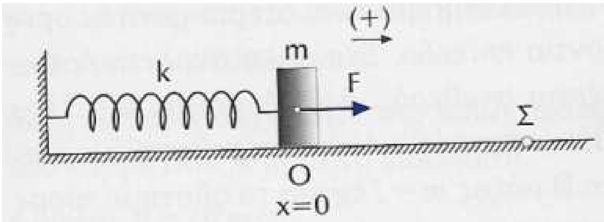
στ. Αν το όριο θραύσεως του νήματος είναι 35 N, πόσο θα πρέπει να είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης ώστε το νήμα να μην κοπεί;

Δίνεται g=10 m/s^2. Θετική φορά να θεωρηθεί η προς τα κάτω.

(Απ.: 75 N/m και 25 N/m, -25.y-10 (S.I.), -5.ημ(5t+3π/2)-10 (S.I.), 0,4 m, 1 m)

172 (Δημόπουλος). Στο ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m στερεώνεται σώμα μάζας m=2 kg, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο στη θέση O με x=0, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F σταθερής διεύθυνσης που το μέτρο της μεταβάλλεται με τη σχέση:

F=60+200.x (S.I.)



Με την επίδραση της δύναμης F το σώμα αρχίζει να μετακινείται. Όταν το σώμα φθάνει στη θέση Σ με x=0,2 m, η δύναμη F καταργείται. Η στιγμή αυτή λαμβάνεται ως στιγμή t=0. Στη συνέχεια το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ.

α. Να βρείτε την ολική ενέργεια της Α.Α.Τ.

β. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t=0.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση O σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το μήκος του ελατηρίου γίνεται ελάχιστο για πρώτη φορά.

Να θεωρήσετε ως θετική τη φορά της δύναμης F.

(Απ.: 16 J, $2\sqrt{3}$ m/s, 0,4.ημ(10.t+π/6) (S.I.), $\frac{2.\pi}{15}$ sec)

173 (Δημόπουλος). Πάνω σε λείο κυκλικό τραπέζι ύψους h=1,25 m, είναι οριζόντια τοποθετημένο ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k=400 N/m, του οποίου το ένα άκρο είναι σταθερά στερεωμένο στο κέντρο του τραπεζιού. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο ένα σώμα μάζας m=1 kg. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά A=5 cm και κατόπιν το αφήνουμε να εκτελέσει Α.Α.Τ. Όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του, απομακρυνόμενο από το κέντρο του τραπεζιού, διασπάται ακαριαία σε δύο κομμάτια $Σ_1$ και $Σ_2$, ίσων μαζών. Το τμήμα $Σ_1$ ολισθαίνει πάνω στο τραπέζι, στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, και πέφτει στο δάπεδο σε οριζόντια απόσταση s=2 m από το άκρο του τραπεζιού. Το τμήμα $Σ_2$ παραμένει προσδεμένο στο άκρο του ελατηρίου και συνεχίζει να εκτελεί α.α.τ. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος,

β. το μέτρο της ταχύτητας του τμήματος $Σ_1$, αμέσως μετά την διάσπαση,

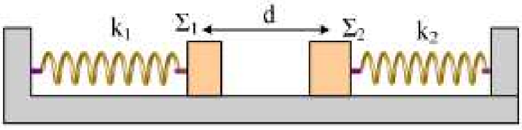
γ. το μέτρο της ταχύτητας του τμήματος $Σ_2$, αμέσως μετά την διάσπαση,

δ. το πλάτος της ταλάντωσης του τμήματος $Σ_2$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

(Απ.: 1 m/s, 4 m/s, 2 m/s, $5\sqrt{2}$ cm)

174 (YLIKONET). Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, που θεωρούνται υλικά σημεία, με μάζες m_1=1kg και m_2=2kg, ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζοντίων ελατηρίων με σταθερές k_1=100N/m και k_2=300N/m αντίστοιχα, όπως στο σχήμα που ακολουθεί, απέχοντας μεταξύ τους κατά d=0,4m.



Εκτρέπουμε το σώμα $Σ_1$ προς τ' αριστερά κατά 0,5m και για t=0, το αφήνουμε να εκτελέσει Α.Α.Τ.

i) Ποια χρονική στιγμή το σώμα $Σ_1$ θα αποκτήσει για πρώτη φορά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα; Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας αυτής.

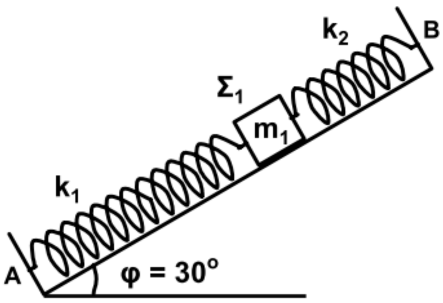
ii) Πόση ταχύτητα θα έχει το σώμα $Σ_1$ πριν τη πλαστική κρούση του με το σώμα $Σ_2$;

iii) Να βρεθεί η θέση, ως προς το φυσικό μήκος του ελατηρίου σταθεράς k_1, γύρω από την οποία θα ταλαντωθεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

iv) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο συσσωμάτωμα.

(Απ.: $\frac{\pi}{20}$ sec και 5 m/s , 3 m/s, 0,3 m, $20.\sqrt{7}$ N)

175 (4^{O} ΘΕΜΑ ΦΥΣ. ΚΑΤΕΥΘ. 2012). Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης φ=30^{O}. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1=60 N/m και k_2=140 N/m αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα $Σ_1$, μάζας m_1=2 kg και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Τη χρονική στιγμή t_O=0 αφήνουμε το σώμα $Σ_1$ ελεύθερο.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το σώμα $Σ_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Δ2. Να γράψετε τη σχέση που δίνει την απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο. Να θεωρήσετε θετική φορά τη φορά από το Α προς το Β.

Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα $Σ_2$ μικρών διαστάσεων μάζας m_2=6 kg. Το σώμα $Σ_2$ δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα $Σ_1$ λόγω της τριβής που δέχεται από αυτό. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

Δ3. Να βρείτε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$.

Δ4. Να βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$, ώστε το $Σ_2$ να μην ολισθαίνει σε σχέση με το $Σ_1$.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2, $ημ30^o = \frac{1}{2}$ και $συν30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Απ.: x=0,05.ημ(10.t+π/2) (S.I.), 150 N/m, $\frac{2.\sqrt{3}}{3}$)

176 (Εξετάσεις 2006, Εσπερ. Λυκείων). Ένα σώμα Σ είναι συνδεδεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=900 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο T=(π/15) s. Το σώμα τη χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα υ=6 m/s κινούμενο προς τα δεξιά. Να βρείτε:

Α. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

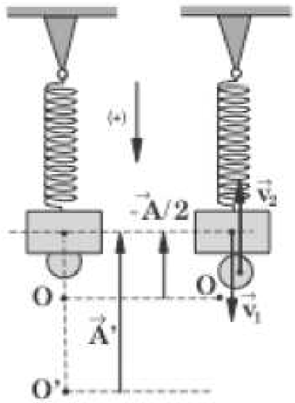
Β. Τη μάζα του σώματος.

Γ. Την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες για το χρονικό διάστημα από 0 έως (2π/15) s.

Δ. Για ποιες απομακρύνσεις ισχύει K=3U, όπου K η κινητική ενέργεια και U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

(Απ.: 0,2 m, 1 kg, x=0,2.ημ30t, $x = \pm 0{,}1\text{m}$)

177 (Pmphysikos). Μικρό σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο σε μια οροφή. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο και καθώς κατέρχεται προς τη θέση ισορροπίας του συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά σε απόσταση A/2 από αυτή, με τεμάχιο πλαστελίνης μάζας m. Διαπιστώνουμε ότι, αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία.

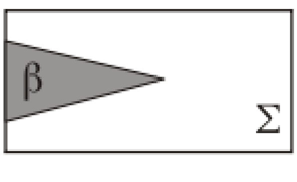


α) Να βρείτε την ταχύτητα της πλαστελίνης λίγο πριν την κρούση.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος, λαμβάνοντας ως αρχή μέτρησης του χρόνου τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση και ως θετική φορά της διεύθυνσης ταλάντωσης, την προς τα κάτω. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

(Απ.: $\frac{A}{2}.\sqrt{\frac{3k}{m}}$, $\left(\frac{m.g}{k}+\frac{A}{2}\right).\sqrt{\frac{k}{2.m}}\ .\sigma\upsilon\nu\left(\frac{k}{2.m}+\frac{3.\pi}{2}\right)$ **)**

178 (Δ ΘΕΜΑ ΠΕΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2005). Έστω σώμα (Σ) μάζας M =1 kg και κωνικό βλήμα (β) μάζας m=0,2 kg. Για να σφηνώσουμε με τα χέρια μας ολόκληρο το βλήμα στο σταθερό σώμα (Σ), όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια 100 J.



Έστω τώρα ότι το σώμα (Σ) που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο, πυροβολείται με το βλήμα (β). Το βλήμα αυτό κινούμενο οριζόντια με κινητική ενέργεια Κ προσκρούει στο σώμα (Σ) και ακολουθεί πλαστική κρούση.

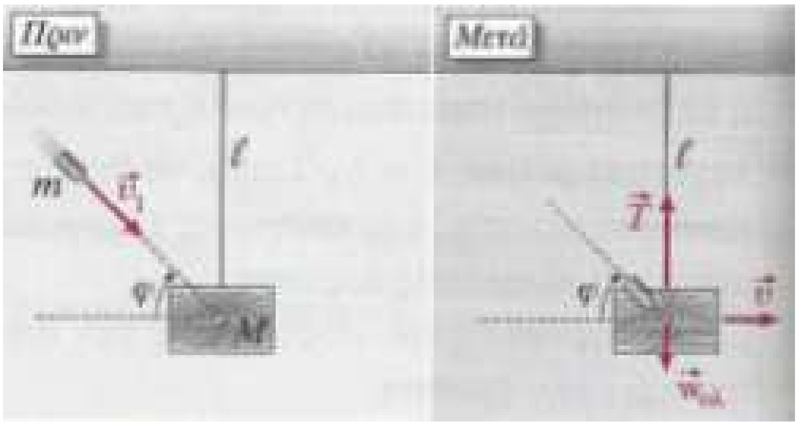
α. Για Κ=100 J θα μπορούσε το βλήμα να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα (Σ); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια Κ που πρέπει να έχει το βλήμα, ώστε να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα (Σ);

γ. Για ποια τιμή του λόγου m/M το βλήμα με κινητική ενέργεια Κ=100 J σφηνώνεται ολόκληρο στο (Σ); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Απ.: Όχι, 120 J, 0)

179. Ξύλο μάζας M=9,8 kg είναι κρεμασμένο από νήμα μήκους l=1 m. Βλήμα μάζας m=0,2 kg, που κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 200\sqrt{2}$ m/s προς τα κάτω σε διεύθυνση που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία φ=45°, σφηνώνεται στο ξύλο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Αν ο χρόνος κίνησης του βλήματος μέσα στο ξύλο είναι t=0,02 sec, να βρείτε:



α. Την ανύψωση του κέντρου μάζας του ξύλου μετά την κρούση.

β. Την τάση του νήματος τη στιγμή που το βλήμα ηρεμεί ως προς το ξύλο.

γ. Τη μέση τάση του νήματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

δ. Την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την διάρκεια της κρούσης.

ε. Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι ίσο με 300 N, ποια η ελάχιστη ταχύτητα του βλήματος, ώστε το νήμα να σπάσει.

στ. Ποια η τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε το νήμα να δημιουργεί γωνία 60° με την κατακόρυφο.

ζ. Ποια η ελάχιστη ταχύτητα του βλήματος, ώστε το συσσωμάτωμα να πραγματοποιήσει ανακύκλωση;

(Απ.: 4 m/s, 0,8 m, 260 N, 2100 N, 7920 J, 4,47 m/s, 223,6 m/s, 110 N, 785 m/s)