

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

A. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΑΕΡΙΑ

1. Σχετικές Ατομικές και Μοριακές Μάζες

Σχετική Ατομική Μάζα (A_r) του ατόμου ενός στοιχείου, ονομάζεται ο αριθμός εκείνος που δείχνει πόσες φορές το άτομο του στοιχείου έχει μεγαλύτερη μάζα από το 1/12 του ατόμου του άνθρακα-12.

Σχετική Μοριακή Μάζα (M_r) του μορίου ενός στοιχείου ή χημικής ένωσης, ονομάζεται ο αριθμός εκείνος που δείχνει πόσες φορές το μόριο του στοιχείου ή της ένωσης έχει μεγαλύτερη μάζα από το 1/12 του ατόμου του άνθρακα-12.

2. Γραμμομόριο

Γραμμομόριο (mol) ενός στοιχείου ή μιας ένωσης ονομάζω ποσότητα ύλης του στοιχείου ή της ένωσης σε g ίση με το M_r .

Π.χ. για το διοξείδιο του άνθρακα $1 \text{ mol} = 44 \text{ g}$ και $M_r = 44 \text{ g/mol}$ ή $44 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Ένα γραμμομόριο ενός στοιχείου ή μιας ένωσης περιέχει επίσης πάντα $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ μόρια. Επίσης σε πρότυπες (stp) ή κανονικές (Κ.Σ.) συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, δηλαδή $P = 1 \text{ atm}$ και $T = 273^\circ \text{ K}$, ένα γραμμομόριο ενός αέριου στοιχείου ή μιας ένωσης καταλαμβάνει όγκο $V_{\text{mo}} = 22,4 \text{ L}$. Γενικά ο όγκος που καταλαμβάνει το ένα mol ενός αέριου στοιχείου ή μιας ένωσης, σε οποιοσδήποτε συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ονομάζεται γραμμομοριακός όγκος (V_m).

Προφανώς ισχύει:

$$m = n \cdot M_r \quad (3.1)$$

$$N = n \cdot N_A \quad (3.2)$$

$$V = n \cdot V_m \quad (3.3)$$

όπου:

n ο αριθμός των mol, m η μάζα, M_r η σχετική μοριακή μάζα,

N ο συνολικός αριθμός των μορίων, N_A ο αριθμός Avogadro

V ο συνολικός όγκος (αν μιλάμε για αέριο)

V_m ο γραμμομοριακός όγκος (22,4 L σε stp)

3. Πυκνότητα

Πυκνότητα ενός σώματος ονομάζουμε το σταθερό πηλίκο της μάζας του προς τον όγκο που καταλαμβάνει:

$$\rho = m/V \quad (3.4)$$

Η πυκνότητα χαρακτηρίζει το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το σώμα.

4. Πίεση

Πίεση (P) ονομάζουμε το φυσικό μονόμετρο μέγεθος που δείχνει το μέτρο της δύναμης που ασκείται **κάθετα** στην μονάδα της επιφάνειας. Δηλαδή:

$$P = \frac{F}{A} \quad (3.5)$$

Μονάδα μέτρησης της πίεσης στο S.I. είναι το $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Μία άλλη συνηθισμένη μονάδα πίεσης είναι η $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Συνήθως στις ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε την σχέση μετατροπής στο S.I.: $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$.

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί αποδίδουν το χαρακτηρισμό «ρευστά» στα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία - αντίθετα με τα στερεά - δεν έχουν δικό τους σχήμα αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει. Η διάκριση των ρευστών σε υγρά και αέρια βασίζεται στη σταθερότητα του όγκου τους (για ορισμένη θερμοκρασία). Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα, έχουν δηλαδή σταθερό όγκο, ανεξάρτητο από την πίεση που δέχονται, εξαιτίας του ότι τα μόρια τους βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο, παρά την σχετική μεταξύ τους κίνηση που τα κάνει να έχουν μεταβλητό σχήμα. Αντίθετα τα αέρια είναι συμπιεστά. Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεσή τους. Και αυτό γιατί οι αποστάσεις των μορίων τους είναι μεγάλες (κατά μέσο όρο 10 φορές μεγαλύτερες από αυτές στα υγρά και τα αέρια) και οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων αμελητέες. Έτσι καθώς η πίεση αυξάνει, οι αποστάσεις των μορίων μειώνονται και τα αέρια συμπιέζονται.

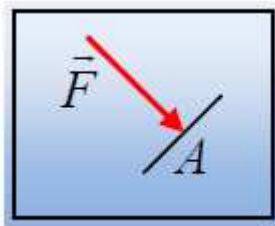
Υδροστατική πίεση σε ένα σημείο ενός υγρού που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, ονομάζεται η πίεση που ασκείται σε ένα πολύ λεπτό σώμα που βρίσκεται σε αυτήν την θέση λόγω του βάρους της υπερκείμενης στήλης του υγρού. Αποδεικνύεται ότι σε υγρό πυκνότητας ρ , που βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας εντάσεως g (επιτάχυνση της βαρύτητας) σε βάθος h , η υδροστατική πίεση έχει μέτρο:

$$P_{\text{υδρ}} = \rho \cdot g \cdot h \quad (3.6)$$

Σημειώσεις:

1. Η υδροστατική πίεση οφείλεται όπως είπαμε στο βάρος του υγρού. Άρα εκτός πεδίου βαρύτητας, ένα υγρό δεν ασκεί υδροστατική πίεση στα σώματα που βρίσκονται μέσα σε αυτό.
2. Σε σημείο δεδομένου υγρού, η υδροστατική πίεση είναι συνάρτηση μόνο του βάθους μέσα στο υγρό.
3. Η πίεση στα υγρά μετριέται με μανόμετρα.

Προφανώς η δύναμη που δέχεται οποιαδήποτε επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ένα ρευστό είναι σε κάθε σημείο κάθετη στην επιφάνεια (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1

5. Όγκος

Ένα αέριο καταλαμβάνει όλο τον όγκο (**V**) του δοχείου που το περιέχει. Ο όγκος μετριέται στο (S.I.) σε m^3 και επίσης σε L και mL, όπου $1 m^3=10^3 L=10^6 mL$ ενώ $1 L=10^3 mL$.

6. Θερμοκρασία

Η θερμοκρασία (**θ**) ενώ σώματος π.χ. αερίου μετριέται κυρίως σε $^{\circ}C$ (βαθμούς Celsius), ενώ η απόλυτη θερμοκρασία (**T**) σε K (βαθμούς Kelvin). Η απόλυτη θερμοκρασία δεν παίρνει αρνητικές τιμές, ενώ ισχύει μεταξύ τους η σχέση:

$$T=273+\theta \quad (3.7)$$

Α. ΝΟΜΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Η κατάσταση στην οποία βρίσκεται ένα αέριο περιγράφεται μακροσκοπικά από την πίεση, τον όγκο και τη θερμοκρασία του. Τα μεγέθη αυτά (πίεση - όγκος - θερμοκρασία) για ορισμένη ποσότητα αερίου δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αλλά συσχετίζονται. Για παράδειγμα, αν αυξήσουμε τη θερμοκρασία σε μια κλειστή φιάλη που περιέχει αέριο θα αυξηθεί και η πίεση. Οι σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά προσδιορίστηκαν πειραματικά και αποτελούν τους νόμους των αερίων. Οι νόμοι των αερίων είναι πειραματικού νόμου που διατυπώθηκαν τον 16^ο και 17^ο αιώνα.

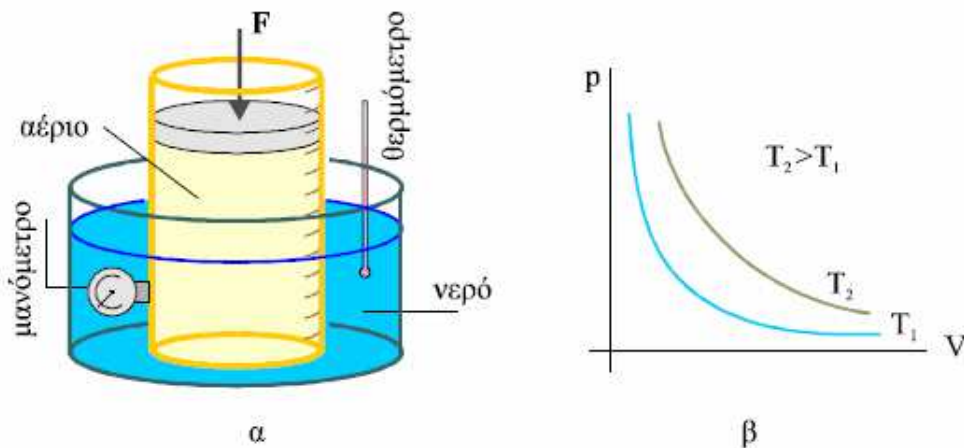
1. Νόμος του Boyle

Η πίεση ορισμένης ποσότητας αερίου του οποίου η θερμοκρασία παραμένει σταθερή είναι αντίστροφα ανάλογη με τον όγκο του.

Η μαθηματική διατύπωση της παραπάνω σχέσης είναι:

$$P \cdot V = \text{σταθερό} \quad \text{ή} \quad P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \quad (3.8) \quad \text{για } T = \text{σταθερό} \quad (\text{ισόθερμη μεταβολή})$$

Η συσκευή που χρησιμοποιούμε για την πειραματική επιβεβαίωση του νόμου του Boyle είναι αυτή που εικονίζεται ακολούθως:



Σχήμα 3.2

α) Το αέριο βρίσκεται μέσα σε ογκομετρικό δοχείο. Το δοχείο με το αέριο περιβάλλεται από λουτρό με νερό του οποίου η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή. Στο δοχείο υπάρχει προσαρμοσμένο μανόμετρο για τη μέτρηση της πίεσης του αερίου. β) Στο διάγραμμα παριστάνεται γραφικά η πίεση του αερίου σε συνάρτηση με τον όγκο του, για θερμοκρασίες T_1 και T_2 για τις οποίες ισχύει $T_2 > T_1$.

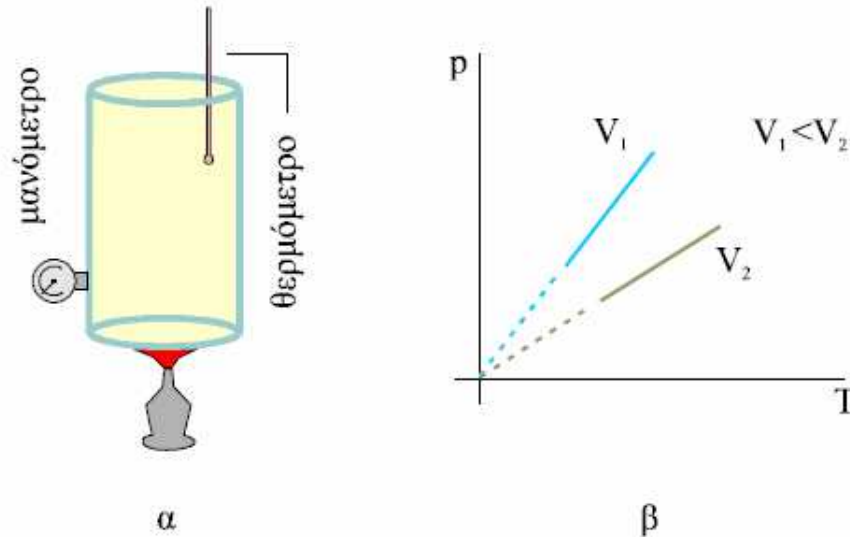
2. Νόμος του Charles

Η πίεση ορισμένης ποσότητας αερίου του οποίου ο όγκος διατηρείται σταθερός είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία του αερίου.

Η μαθηματική διατύπωση της παραπάνω σχέσης είναι:

$$\frac{P}{T} = \text{σταθερό} \quad \text{ή} \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (3.9) \quad \text{για } V = \text{σταθερό} \quad (\text{ισόχωρη μεταβολή})$$

Η συσκευή που χρησιμοποιούμε για την πειραματική επιβεβαίωση του νόμου του Charles είναι αυτή που εικονίζεται ακολούθως:



Σχήμα 3.3

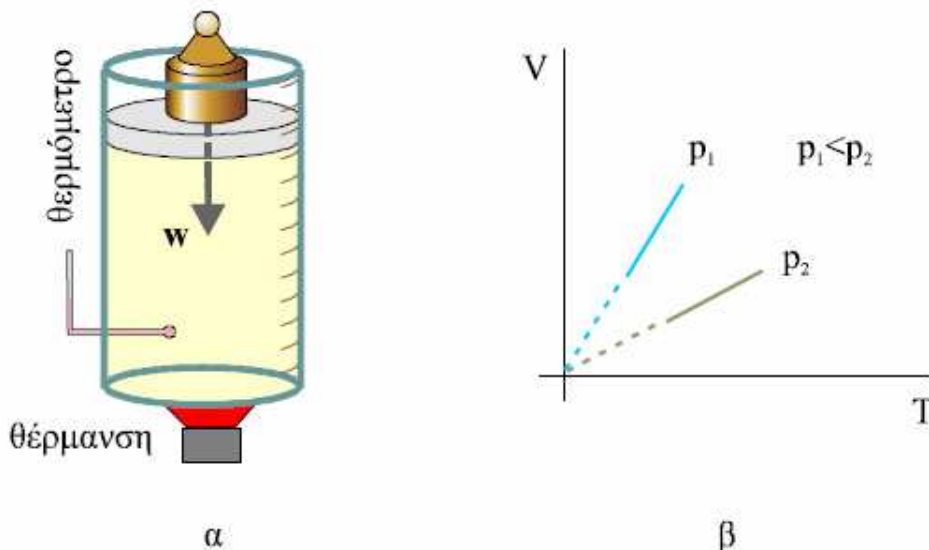
α) Το αέριο βρίσκεται μέσα σε δοχείο σταθερού όγκου. Καθώς θερμαίνεται αυξάνεται η πίεσή του.
 β) Στο διάγραμμα παριστάνεται γραφικά η μεταβολή της πίεσης σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία, για δύο διαφορετικές τιμές του όγκου V_1 και V_2 με $V_1 < V_2$.

3. Νόμος του Gay-Lussac

Ο όγκος ορισμένης ποσότητας αερίου, όταν η πίεσή του διατηρείται σταθερή, είναι ανάλογος με την απόλυτη θερμοκρασία του.

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου είναι :

$$\frac{V}{T} = \text{σταθερό} \quad \text{ή} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (3.10) \quad \text{για } P = \text{σταθερό (ισόβαρης μεταβολή)}$$



Σχήμα 3.4

α) Καθώς το αέριο θερμαίνεται ο όγκος του αυξάνεται. Η πίεση του αερίου διατηρείται σταθερή με ένα βάρος τοποθετημένο πάνω στο έμβολο. β) Στο διάγραμμα παριστάνεται γραφικά η μεταβολή του όγκου σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία, για δυο τιμές της πίεσης p_1 και p_2 με $p_1 < p_2$.

Μάλιστα αν το βάρος είναι W , το εμβαδόν του εμβόλου είναι A και η ατμοσφαιρική πίεση P_{atm} , η πίεση του αερίου θα είναι:

$$P_{αερ} = P_{atm} + \frac{W}{A} \quad (3.11)$$

Δηλαδή θα είναι σταθερή.

Ιδανικά αέρια

Οι τρεις προηγούμενοι νόμοι ισχύουν για τα διάφορα αέρια με μικρές ή μεγάλες αποκλίσεις. Συγκεκριμένα ισχύουν με μεγαλύτερη ακρίβεια για ένα μονοατομικό παρά για ένα πολυατομικό αέριο που βρίσκεται στις ίδιες συνθήκες. Επίσης ισχύουν με μεγαλύτερη ακρίβεια για τα θερμά και αραιά αέρια από ό,τι για τα πυκνά και ψυχρά. Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιο αέριο υπακούει με ακρίβεια στους νόμους αυτούς ανεξάρτητα από το αν είναι θερμό ή ψυχρό, πυκνό ή αραιό. Ένα τέτοιο αέριο ακριβώς επειδή στην πραγματικότητα δεν υπάρχει θα ονομάζεται ιδανικό αέριο.

Μακροσκοπικά ιδανικό αέριο, είναι αυτό που υπακούει στους τρεις νόμους των αερίων σε οποιοδήποτε συνθήκες κι αν βρίσκεται.

Σημείωση:

Οι γραφικές παραστάσεις p - T (σχήμα 3.3β) και V - T (σχήμα 3.4β) αν αναφέρονταν σε ιδανικό αέριο θα ήταν συνεχείς γραμμές, για όλες τις θερμοκρασίες.

Συνδυαστικός νόμος των αερίων

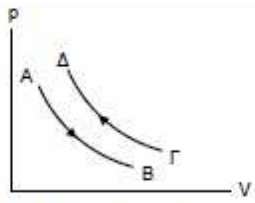
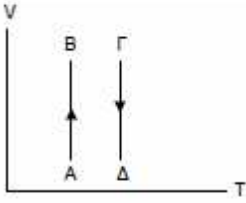
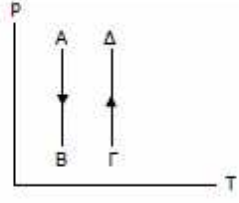
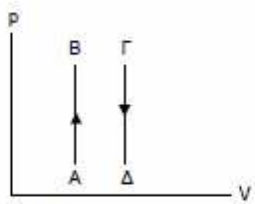
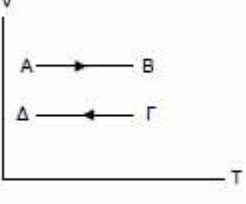
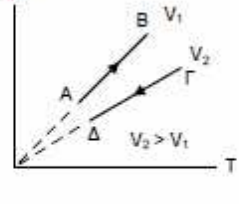
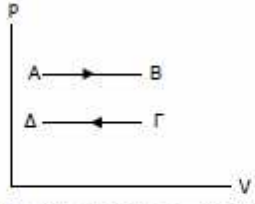
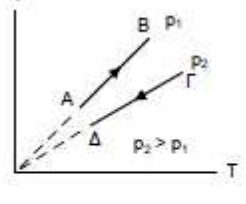
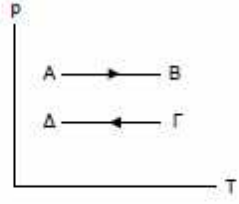
Για ορισμένη ποσότητα αερίου ισχύει:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \text{σταθερό} \quad \text{ή} \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (3.12)$$

Από τον συνδυαστικό νόμο που ισχύει για οποιαδήποτε μεταβολή, αρκεί η **μάζα του αερίου να παραμένει σταθερή**, προκύπτουν εύκολα οι νόμοι των αερίων:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \begin{array}{l} \xrightarrow{T=\text{σταθ.}} p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (pV = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Boyle}) \\ \xrightarrow{V=\text{σταθ.}} \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \left(\frac{p}{T} = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Charles} \right) \\ \xrightarrow{p=\text{σταθ.}} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \left(\frac{V}{T} = \text{σταθ.} \quad \text{Νόμος Gay Lussac} \right) \end{array}$$

Συνοπτικά έχουμε:

	$p - V$	$V - T$	$p - T$
ΙΣΟΘΕΡΜΗ	 <p>$A \rightarrow B$ Εκτόνωση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Συμπίεση</p>	 <p>$A \rightarrow B$ Εκτόνωση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Συμπίεση</p>	 <p>$A \rightarrow B$ Εκτόνωση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Συμπίεση</p>
ΙΣΟΧΩΡΗ	 <p>$A \rightarrow B$ Θέρμανση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Ψύξη</p>	 <p>$A \rightarrow B$ Θέρμανση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Ψύξη</p>	 <p>$A \rightarrow B$ Θέρμανση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Ψύξη</p>
ΙΣΟΒΑΡΗΣ	 <p>$A \rightarrow B$ Εκτόνωση - Θέρμανση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Συμπίεση - Ψύξη</p>	 <p>$A \rightarrow B$ Εκτόνωση - Θέρμανση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Συμπίεση - Ψύξη</p>	 <p>$A \rightarrow B$ Εκτόνωση - Θέρμανση $\Gamma \rightarrow \Delta$ Συμπίεση - Ψύξη</p>

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Ο συνδυαστικός νόμος των αερίων οδηγεί στην καταστατική εξίσωση των αερίων, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (3.13)$$

όπου:

P: η πίεση που ασκεί το αέριο στα τοιχώματα του δοχείου (μετρημένη στο S.I. σε N/m^2),

V: ο όγκος του αερίου (μετρημένος στο S.I. σε m^3),

n: ο αριθμός των mol του αερίου,

T: η απόλυτη θερμοκρασία (μετρημένη σε K),

R=8,314 Joule/(mol.K): η παγκόσμια σταθερά των αερίων.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.1 και 3.4 η καταστατική εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow P \cdot V = \frac{m}{M_r} \cdot R \cdot T \Leftrightarrow P \cdot M_r = \frac{m}{V} \cdot R \cdot T \Leftrightarrow \mathbf{P \cdot M_r = \rho \cdot R \cdot T} \quad (3.14)$$

Η καταστατική εξίσωση μπορεί να μας δώσει και έναν απλούστερο μακροσκοπικό ορισμό του ιδανικού αερίου:

Ιδανικό αέριο είναι το αέριο για το οποίο ισχύει η καταστατική εξίσωση ακριβώς, σε όλες τις πιέσεις και θερμοκρασίες.

B. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Στη συνέχεια, όπου αναφερόμαστε σε αέρια θα θεωρούμε ότι οι συνθήκες είναι τέτοιες ώστε η καταστατική εξίσωση να ισχύει χωρίς αποκλίσεις.

Η ακριβής μέτρηση της θερμοκρασίας ή της πίεσης ή, ακόμη πιο πέρα, η γνώση των σχέσεων αναλογίας μεταξύ πίεσης, όγκου, αριθμού mol και θερμοκρασίας δεν αρκούν για να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά των αερίων.

Η μακροσκοπική συμπεριφορά των αερίων ερμηνεύτηκε ικανοποιητικά, μόλις στο τέλος του 19ου αιώνα, με την **κινητική θεωρία των αερίων**. Η επιτυχία της κινητικής θεωρίας έδωσε το έναυσμα και για την ανάπτυξη ιδεών για τη δομή της ύλης γενικότερα. Επίσης, όπως συμβαίνει συχνά στην ιστορία της επιστήμης, η ανάγκη επίλυσης πολύπλοκων υπολογιστικών προβλημάτων που έθετε η νέα θεωρία οδήγησε στην ανάπτυξη ενός νέου κλάδου της Φυσικής, της Στατιστικής Φυσικής, που αποτέλεσε αργότερα πολύτιμο εργαλείο για τη θεμελίωση της σύγχρονης Φυσικής, με εφαρμογές που ξεπέρασαν κατά πολύ τον αρχικό λόγο ύπαρξής της.

Σημείο εκκίνησης της κινητικής θεωρίας είναι η υπόθεση ότι **τα αέρια αποτελούνται από πολύ μεγάλο πλήθος απειροελάχιστων σφαιριδίων που κινούνται τυχαία** (άτακτα) μέσα στο χώρο που καταλαμβάνει το αέριο. Τα σφαιρίδια αυτά δεν είναι τίποτε άλλο από αυτό που σήμερα αποτελεί για τον καθένα κοινό τόπο, **τα μόρια του αερίου**.

Πιο συγκεκριμένα, για τα ιδανικά αέρια, που προηγουμένως ορίστηκαν μακροσκοπικά ως τα αέρια για τα οποία ισχύει υπό οποιοσδήποτε συνθήκες η καταστατική εξίσωση, η κινητική θεωρία στηρίχτηκε στις εξής παραδοχές :

- 1. Τα μόρια του αερίου συμπεριφέρονται σαν μικροσκοπικές, απόλυτα ελαστικές, σφαίρες.** Έτσι ο συνολικός όγκος των μορίων του αερίου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος σε σχέση με τον όγκο του δοχείου στο οποίο βρίσκεται.
- 2. Στα μόρια δεν ασκούνται δυνάμεις παρά μόνο τη στιγμή της κρούσης με άλλα μόρια ή με τα τοιχώματα του δοχείου.** Έτσι, η κίνησή τους, στο μεσοδιάστημα μεταξύ δύο κρούσεων, είναι ευθύγραμμη ομαλή.
- 3. Οι κρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα είναι ελαστικές.** Έτσι η κινητική ενέργεια του μορίου δεν μεταβάλλεται μετά την κρούση του με το τοίχωμα.

Γ. ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Σχέση πίεσης (P) και απόλυτης θερμοκρασίας (T) με τις ταχύτητες των μορίων)

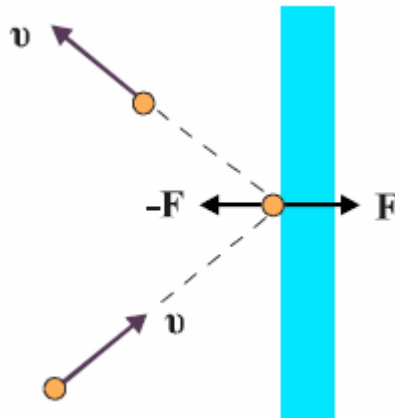
Βασισμένοι στις παραπάνω παραδοχές καταφέραμε να βρούμε σχέσεις που συνδέουν τα μακροσκοπικά μεγέθη, όπως η πίεση και η θερμοκρασία, που μέχρι τώρα μπορούσαμε να τα προσδιορίσουμε μόνο πειραματικά, με τις μέσες τιμές των ταχυτήτων των μορίων του αερίου.

Την πίεση την ορίσαμε μέσω της σχέσης 3.5. Στην περίπτωση ενός αερίου που είναι κλεισμένο σ' ένα δοχείο η πίεση που ασκείται στα τοιχώματα του δοχείου οφείλεται στις δυνάμεις που ασκούν τα μόρια του αερίου στα τοιχώματα κατά τις κρούσεις τους με αυτά (σχήμα 3.5).

Η πρώτη σχέση που προκύπτει από την εφαρμογή των νόμων της μηχανικής και των παραδοχών της κινητικής θεωρίας, είναι αυτή που συνδέει την πίεση (p) του αερίου με τις ταχύτητες των μορίων του αερίου. Βρέθηκε συγκεκριμένα ότι (σχέση 3.15):

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m \overline{v^2}}{V}$$

όπου: N ο αριθμός των μορίων του αερίου, m η μάζα κάθε μορίου, V ο όγκος του δοχείου και $\overline{v^2} = \overline{v_{ev}^2}$ η μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων του αερίου, η οποία ισούται με την ενεργό ταχύτητα.



Σχήμα 3.5

Μαθηματικό παράρτημα:

➤ Μέση ταχύτητα των μορίων ενός αερίου

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N}$$

➤ Μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου

$$\bar{K} = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_N}{N} = \frac{1/2mv_1^2 + 1/2mv_2^2 + \dots + 1/2mv_N^2}{N} = \frac{1}{2}m \left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \right) = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$$

δηλαδή:
$$\bar{v}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}$$

Σημείωση:

1. Η μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων και το τετράγωνο της μέσης τιμής τους δεν ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$\bar{v}^2 \neq (\bar{v})^2 \quad \text{ή} \quad \sqrt{\bar{v}^2} \neq \bar{v} \quad \text{ή} \quad v_{ev} \neq \bar{v}$$

2. Η μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων ονομάζεται ενεργός ταχύτητα των μορίων, δηλαδή ισχύει:

$$v_{ev}^2 = \left(\sqrt{\bar{v}^2} \right)^2 = \bar{v}^2$$

Από την σχέση 3.15 μπορεί να πάρουμε:

$$P = \frac{1}{3} \frac{m_{ολ}}{V} \cdot v_{ev}^2 \Leftrightarrow P = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v_{ev}^2 \quad (3.16)$$

Επίσης η σχέση 3.15 μπορεί να πάρει την μορφή:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ev}^2 \Leftrightarrow \mathbf{P \cdot V} = \frac{2}{3} \cdot \mathbf{N \cdot \bar{E}_K} \quad (3.17)$$

όπου $\bar{E}_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ev}^2$ (3.18) η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου.

Επίσης η καταστατική εξίσωση μπορεί να πάρει και την εξής μορφή:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Leftrightarrow P \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T$$

Αν ορίσω ως σταθερά Boltzmann την ποσότητα $k=R/N_A=1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K, θα έχω:

$$\mathbf{P \cdot V = N \cdot k \cdot T} \quad (3.19)$$

Η οποία αποτελεί μια άλλη μορφή της καταστατικής εξίσωσης.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.17) και (3.18) έχουμε:

$$\frac{2}{3} \cdot N \cdot \bar{E}_K = N \cdot k \cdot T \Leftrightarrow \bar{E}_K = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad (3.20)$$

Η σχέση (3.20) δείχνει ότι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων εξαρτάται μόνο από την απόλυτη θερμοκρασία τους.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.18) και (3.20) θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ev}^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \Leftrightarrow \mathbf{v_{ev}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3 \cdot k \cdot T}}{\mathbf{m}}} \quad (3.21)$$

Χρησιμοποιώντας δε τις σχέσεις $k=R/N_A$ και $m \cdot N_A=M_r$, η σχέση (3.21) γίνεται:

$$\mathbf{v_{ev}} = \sqrt{\frac{\mathbf{3 \cdot R \cdot T}}{\mathbf{M_r}}} \quad (3.22)$$

Οι σχέσεις (3.21) και (3.22) δίνουν την ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου και δείχνουν ότι εξαρτάται μόνο από την απόλυτη θερμοκρασία και την σχετική μοριακή μάζα του αερίου.