ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

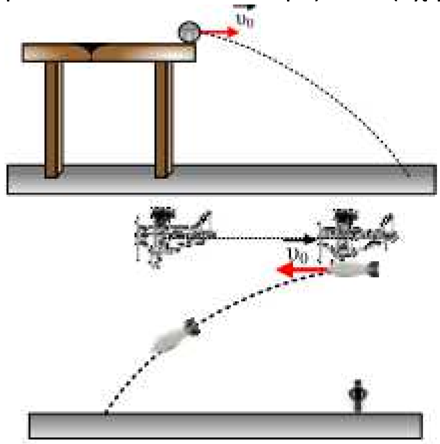
ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Α. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

***Οριζόντια βολή,* ονομάζουμε την εκτόξευση ενός σώματος από ύψος h από το έδαφος, με οριζόντια ταχύτητα u_o, όταν στο σώμα επιδρά μόνο το βάρος το οποίο θεωρείται σταθερό.**

Παραδείγματα οριζόντιας βολής:

Οριζόντια βολή εκτελεί ένα σώμα που εκτοξεύεται οριζόντια από ένα τραπέζι ή η βόμβα που αφήνει ένα αεροπλάνο ενώ κινείται οριζόντια (σχήματα 1.1).



Σχήμα 1.1

Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η οριζόντια βολή είναι σύνθετη κίνηση που αποτελείται από δύο απλές κινήσεις, μία κατακόρυφη που είναι ελεύθερη πτώση (γιατί στον κατακόρυφο άξονα το σώμα δέχεται μόνο το βάρος του) και μία οριζόντια που είναι ευθύγραμμη ομαλή (γιατί στον οριζόντιο άξονα το σώμα δεν δέχεται δυνάμεις). Οι δύο κινήσεις εξελίσσονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο που ορίζεται από την ταχύτητα του αντικειμένου Β, η οποία κάθε χρονική στιγμή είναι εφαπτόμενη στην τροχιά του και έχει το διάνυσμά της πάνω σε αυτό το επίπεδο.

Περιγραφή σύνθετης κίνησης:

Για να περιγράψουμε γενικότερα τις σύνθετες κινήσεις χρησιμοποιούμε ***την αρχή ανεξαρτησίας (ή αρχή της επαλληλίας) των κινήσεων***, που διατυπώνεται ως εξής:
"Όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις, κάθε μία απ' αυτές εκτελείται εντελώς ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία φτάνει το κινητό μετά από χρόνο t, είναι η ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα, είτε εκτελούνται διαδοχικά, σε χρόνο t κάθε μία".

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας και της μετατόπισης, μετά από χρόνο t, γράφουμε το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων ή των μετατοπίσεων αντίστοιχα, που θα είχε το κινητό, αν εκτελούσε κάθε μία κίνηση ανεξάρτητα και επί χρόνο t.
Δηλαδή σε διανυσματική μορφή θα έχουμε:

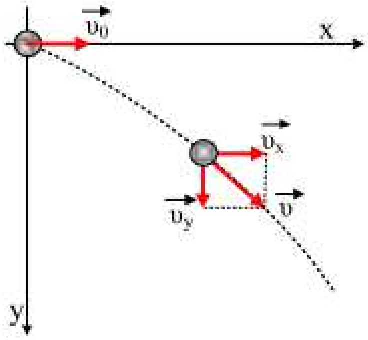
$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 \quad (1.1) \qquad \text{και} \qquad \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \quad (1.2)$$

Μελέτη της οριζόντιας βολής:

Για να μελετήσουμε την οριζόντια βολή, ενός σώματος μάζας **m** που εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ από ύψος **h** (βλέπε σχήμα 1.2) από το έδαφος ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

α. Επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων που έχει ως αρχή το σημείο **O** εκτόξευσης του σώματος.

β. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων αναλύουμε την κίνηση σε δύο επιμέρους κινήσεις που πραγματοποιούνται ταυτόχρονα στον κάθε ένα ημιάξονα Οx και Οy και γράφουμε τις εξισώσεις που σε κάθε περίπτωση ισχύουν.



Σχήμα 1.2

Θα έχουμε λοιπόν:

Οx-ημιάξονας: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή (αφού δεν ασκούνται δυνάμεις)

Εξίσωση ταχύτητας-χρόνου: $\boldsymbol{\upsilon_x=\upsilon_o=}$**σταθερή** (1.3)

Εξίσωση θέσης-χρόνου: $\boldsymbol{x=\upsilon_o.t}$ (1.4)

Οy-ημιάξονας: Ελεύθερη πτώση (αφού ασκείται μόνο το βάρος)

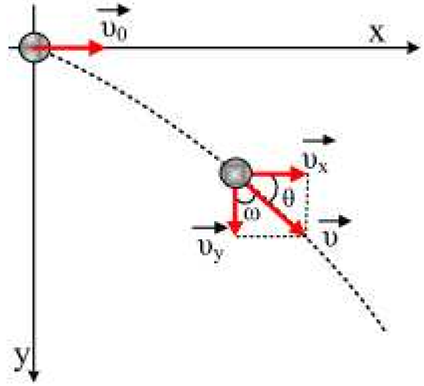
Εξίσωση ταχύτητας-χρόνου: $\boldsymbol{\upsilon_y=g.t}$ (1.5)

Εξίσωση θέσης-χρόνου: $\boldsymbol{y=(1/2).g.t^2}$ (1.6)

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

Ταχύτητα σώματος:

Η ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή θα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά και το μέτρο της θα δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων στους ημιάξονες Οx και Οy (βλέπε σχήμα 1.3)



Σχήμα 1.3

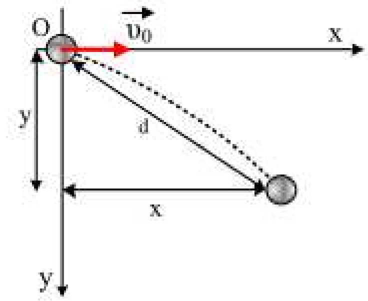
$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$ η οποία μέσω των σχέσεων 1.3 και 1.5 γίνεται: $\boldsymbol{\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + (g.t)^2}}$ (1.7)
και η διεύθυνσή της δίνεται από την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με κάποιον από τους δύο ημιάξονες. Π.χ. με τον Οx-ημιάξονα:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_o} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta = \frac{g.t}{\upsilon_o}} \qquad (1.8)$$

Θέση σώματος:

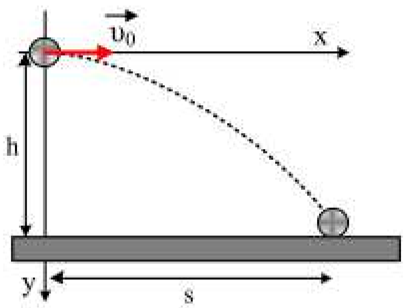
Η θέση του σώματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή προσδιορίζεται αν προσδιοριστούν οι συντεταγμένες του σώματος αυτή την χρονική στιγμή από τις σχέσεις 1.4 και 1.6 και η απόστασή του **d** από το σημείο εκτόξευσης (βλέπε σχήμα 1.4) δίνεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{(\upsilon_o.t)^2 + (\frac{1}{2}.g.t^2)^2}} \qquad (1.9)$$



Σχήμα 1.4

Χαρακτηριστικά μεγέθη για την οριζόντια βολή (βλέπε σχήμα 1.5):



Σχήμα 1.5

<u>1. Συνολικός χρόνος κίνησης ή χρόνος πτήσης:</u>

θέτοντας στην (1.6) όπου y το h (ύψος από το οποίο εκτοξεύεται το σώμα) έχουμε:

$$\boldsymbol{t_{o\lambda} = \sqrt{2.h/g}} \qquad (1.10)$$

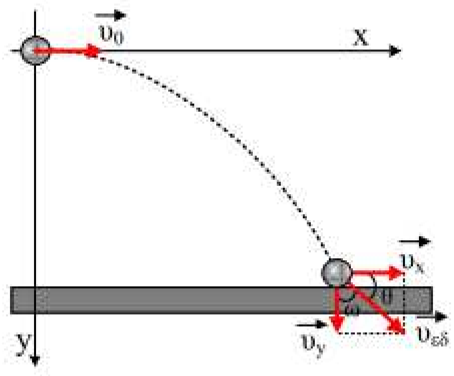
2. Βεληνεκές:

Την μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του σώματος την ονομάζουμε *βεληνεκές (s)* (Σχήμα 1.5).

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1.4) την σχέση (1.10) έχουμε:

$$\mathbf{s = \upsilon_o . \sqrt{2.h/g}} \qquad (1.11)$$

3. Ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στο έδαφος ($\upsilon_{\varepsilon\delta}$):



Σχήμα 1.6

Αν στην σχέση (1.7) αντικαταστήσουμε την σχέση (1.10) τότε θα έχουμε για το μέτρο της ταχύτητας όταν αυτή φτάνει στο έδαφος:

$$\mathbf{\upsilon_{\varepsilon\delta} = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2.g.h}} \qquad (1.12)$$

ενώ η κατεύθυνσή της δίνεται από την σχέση (1.8) αν αντικαταστήσουμε την σχέση (1.10) (βλέπε σχήμα 1.6):

$$\mathbf{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{2.g.h}}{\upsilon_o}} \qquad (1.13)$$

4. Απόσταση σώματος από το σημείο εκτόξευσης όταν φτάνε στο έδαφος ($d_{o\lambda}$):

Η σχέση (1.9) θέτοντας x=s και y=h γίνεται:

$$\mathbf{d_{o\lambda} = \sqrt{s^2 + h^2}} \qquad (1.14)$$

5. Εξίσωση τροχιάς:

Λύνοντας την (1.4) ως προς t και αντικαθιστώντας στην (1.6) θα έχουμε:

$$\mathbf{y = \frac{g}{2.u_o^2}.x^2} \qquad (1.15)$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται εξίσωση τροχιάς γιατί συνδέει τις συντεταγμένες θέσεις του σώματος στους δύο άξονες κάθε χρονική στιγμή και δείχνει ότι η τροχιά του σώματος είναι ***παραβολή.***

Β. ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Β1. Εισαγωγή

Περιοδικές ονομάζονται οι κινήσεις εκείνες, οι οποίες επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα τα οποία ονομάζονται ***περίοδοι.*** Η περίοδος συμβολίζεται με το ***Τ*** και στο S.I. μετριέται σε sec.
Συχνότητα (f) μιας περιοδικής κίνησης ονομάζεται ο αριθμός των κινήσεων που ολοκληρώνονται στην μονάδα του χρόνου. Δηλαδή ισχύει:

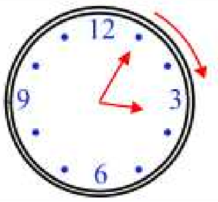
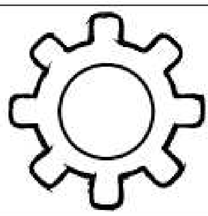
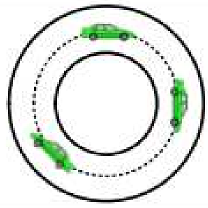
$$\mathbf{f} = \frac{\textbf{Αριθμός κινήσεων}}{\textbf{Χρόνος}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{\Delta t}} \Rightarrow \mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \quad (1.16)$$

Η συχνότητα **(f)** στο S.I. μετριέται σε sec^{-1} ή Hz.

Κυκλική κίνηση, ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος όταν η τροχιά που διαγράφει είναι περιφέρεια κύκλου. Η απλούστερη από τις κυκλικές κινήσεις είναι η ***ομαλή κυκλική κίνηση.***

Ομαλή κυκλική κίνηση, ονομάζουμε την κίνηση ενός σώματος σε κυκλική τροχιά όταν το μέτρο της ταχύτητας σταθερό, δηλαδή το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα.

Π.χ. ομαλή κυκλική κίνηση εκτελούν οι δείκτες ενός ρολογιού, τα γρανάζια ή ένα αυτοκίνητο σε μία κυκλική πλατεία (σχήμα 1.7).

		
κίνηση ωροδείκτη και λεπτοδείκτη	κυκλική κίνηση γραναζιού	αυτοκίνητο σε κυκλική πλατεία

Σχήμα 1.7

Β2. Κυκλική κίνηση – Κινηματική μελέτη

Στην ομαλή κυκλική κίνηση ορίζουμε:

1. Γραμμική ταχύτητα:

Γενικά στις καμπυλόγραμμες κινήσεις, γραμμική ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$) είναι η ταχύτητα της οποίας το μέτρο δείχνει τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του τόξου που διαγράφει το σώμα και της οποίας το διάνυσμα είναι συνεχώς εφαπτόμενο στην τροχιά.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση ειδικότερα, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ισούται με το πηλίκο του μήκους του τόξου που διανύει το κινητό σε κάποιο χρόνο προς τον χρόνο αυτό. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{t}} \Leftrightarrow \quad (1.17)$$

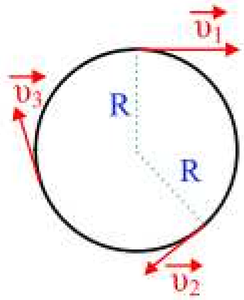
$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\mathbf{2.\pi.R}}{\mathbf{T}} = \mathbf{2.\pi.R.f} \quad (1.18)$$

όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.
Η σχέση (1.17) μετασχηματίζεται στην σχέση (1.18) αν λάβουμε υπόψιν ότι χρόνο ίσο με μία περίοδο (δηλαδή t=T) το σώμα διαγράφει τροχιά μήκους ίσου με την περιφέρεια του κύκλου (δηλαδή s=2.π.R) καθώς και ότι f=1/T.

Σημειώσεις:

1. Στην ομαλή κυκλική κίνηση η γραμμική ταχύτητα έχει μεν συνεχώς σταθερό μέτρο, αλλά η ταχύτητά της διαρκώς αλλάζει κατά κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.8.

2. Η ακτίνα που ενώνει το σώμα με το κέντρο της τροχιάς ονομάζεται **επιβατική ακτίνα.**



Σχήμα 1.8

2. Γωνιακή ταχύτητα:

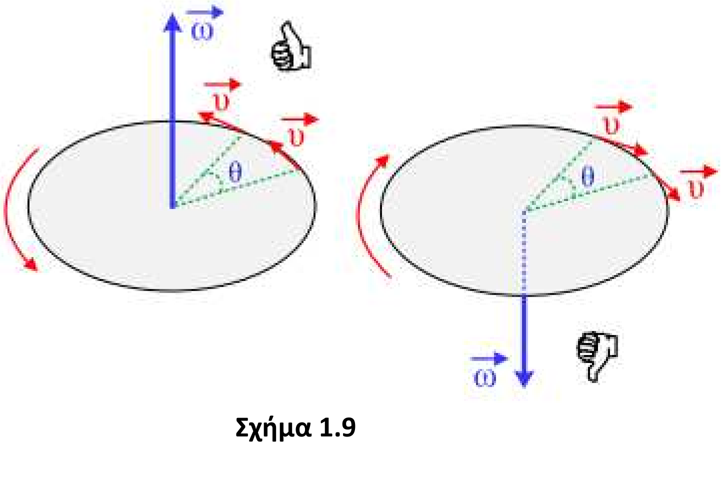
Γενικά στις καμπυλόγραμμες κινήσεις, γωνιακή ταχύτητα ($\vec{\omega}$) είναι η ταχύτητα της οποίας το μέτρο δείχνει τον ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του σώματος και της οποίας το διάνυσμα είναι συνεχώς κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς με την φορά να δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση ειδικότερα, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ισούται με το πηλίκο της γωνίας που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού σε κάποιο χρόνο προς τον χρόνο αυτό. Δηλαδή:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Leftrightarrow \qquad (1.19)$$

$$\omega = \frac{2.\pi}{T} = 2.\pi.f \qquad (1.20)$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι κάθετη στο επίπεδο της κίνησης με φορά την φορά κίνησης δεξιόστροφου κοχλία (βίδας) ή την φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (βλέπε σχήμα 1.9), και έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. το 1 rad/s, ενώ η γωνία στο S.I. να θυμίσουμε ότι μετριέται σε rad, όπου π rad=180° και 1 rad=57,3°.



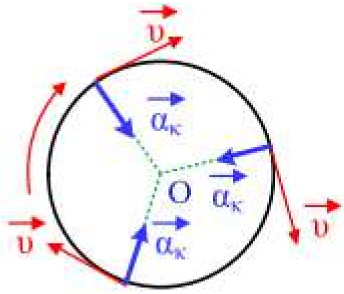
Σχήμα 1.9

Προφανώς οι σχέσεις (1.18) και (1.20) δίνουν την σχέση που συνδέει τα μέτρα της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας:

$$\upsilon = \omega . R \qquad (1.21)$$

Β3. Κυκλική κίνηση – Δυναμική μελέτη

Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται η κατεύθυνση της, επομένως το σώμα επιταχύνεται. Η επιτάχυνση που συνδέεται με το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας ονομάζεται ***κεντρομόλος επιτάχυνση ($\vec{\alpha}_\kappa$)***.
Η **κεντρομόλος επιτάχυνση** έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (βλέπε σχήμα 1.10):



Σχήμα 1.10

1. ακτινική διεύθυνση δηλαδή την διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας,
2. φορά προς το κέντρο του κύκλου,
3. σταθερό μέτρο ίσο με:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1.22)$$

Η σχέση (1.22) μέσω των σχέσεων (1.21) και (1.20) γίνεται:

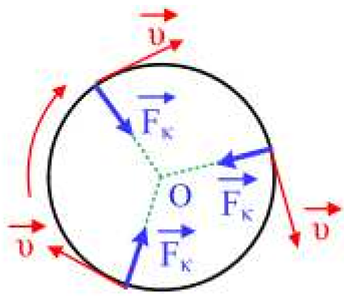
$$\alpha_\kappa = \omega^2 . R = 4.\pi^2 . f^2 . R \qquad (1.23)$$

Κεντρομόλος δύναμη (F_K) ονομάζεται το αίτιο που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση. Επομένως με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Newton ($F_K = m.\alpha_\kappa$), αν θεωρήσουμε **m** την μάζα του σώματος που κινείται κυκλικά, θα έχουμε:

$$F_\kappa = m.\frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1.24)$$

$$F_\kappa = m.\omega^2 . R = m.4.\pi^2 . f^2 . R \qquad (1.25)$$

Προφανώς η κεντρομόλος δύναμη έχει επίσης διεύθυνση ακτινική και φορά προς το κέντρο της τροχιάς.

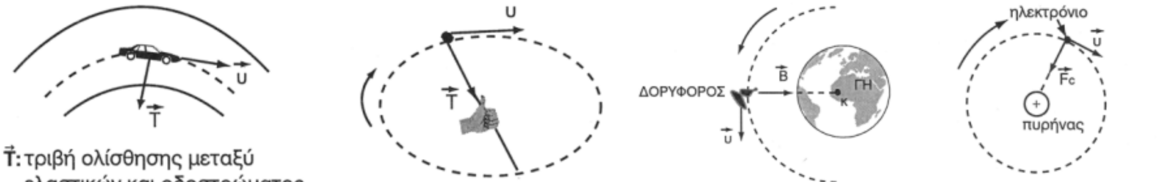


Σχήμα 1.11

Σημείωση:

Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι κάποιο είδος δύναμης ΄΄καινούργιο΄΄. Ως κεντρομόλο δύναμη στην ομαλή κυκλική κίνηση ορίζουμε την συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στην ακτινική διεύθυνση, στον άξονα δηλαδή που κάθε χρονική στιγμή ενώνει το κέντρο της τροχιάς με την θέση του σώματος.

Στο σχήμα (1.12) ακολούθως φαίνονται παραδείγματα στα οποία κάποια δύναμη ΄΄παίζει΄΄ τον ρόλο της κεντρομόλου.



$\vec{T}$: τριβή ολίσθησης μεταξύ ελαστικών και οδοστρώματος
$\vec{T}$: τάση του νήματος
$\vec{B}$: βάρος δορυφόρου
$\vec{F}_c$: δύναμη Coulomb από τον πυρήνα

Σχήμα 1.12

Γενικότερα στις καμπυλόγραμμες κινήσεις αναγνωρίζουμε:

α. την επιτρόχια ή εφαπτομενική δύναμη ($\vec{F}_ε$), η οποία είναι εφαπτόμενη στην τροχιά και επιταχύνει ή επιβραδύνει το σώμα προκαλώντας επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{α}_ε$. Προφανώς θα ισχύει:

$$\vec{F}_ε = m.\vec{α}_ε \qquad (1.26)$$

β. την κεντρομόλο δύναμη ($\vec{F}_κ$, η οποία είναι ακτινική με φορά προς το κέντρο και είναι υπεύθυνη για την περιστροφή του σώματος προκαλώντας κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$\vec{F}_κ = m.\vec{α}_κ \Leftrightarrow \vec{F}_K = \frac{m.υ^2}{R} \qquad (1.27)$$

όπου $α_κ=υ^2/R$ η κεντρομόλος επιτάχυνση.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Στην ομαλή κυκλική κίνηση υπάρχει μόνο η κεντρομόλος δύναμη διότι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος παραμένει σταθερό, ενώ στις ευθύγραμμες μεταβαλλόμενες κινήσεις υπάρχει μόνο επιτρόχια επιτάχυνση.

2. Να θυμηθούμε ότι ένα υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση (ή γενικότερα καμπυλόγραμμη κίνηση), έχει επιτάχυνση η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες (Σχήμα 1.13), την επιτρόχια ή εφαπτομενική ή γραμμική επιτάχυνση (που σχετίζεται με τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής) και την κεντρομόλο επιτάχυνση (που σχετίζεται με το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας)

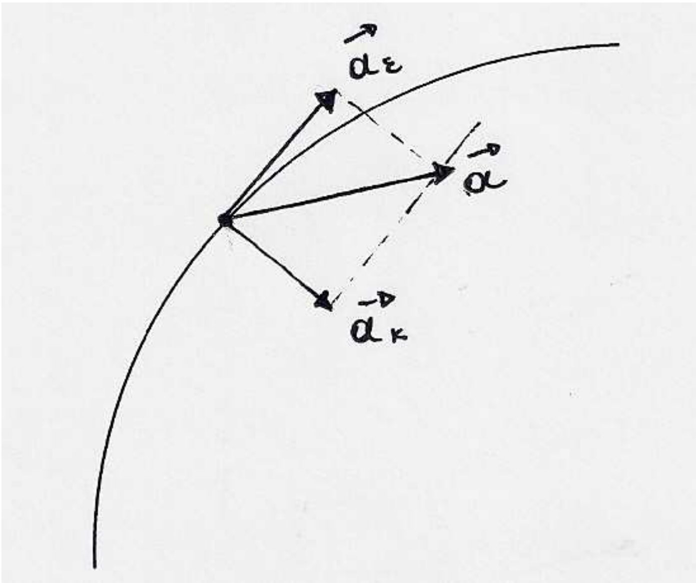
Η επιτρόχια επιτάχυνση έχει κατεύθυνση εφαπτομενική στην τροχιά ενώ η κεντρομόλος έχει κατεύθυνση. Η διανυσματική σύνθεση των δύο αυτών επιταχύνσεων δίνει την συνολική επιτάχυνση $\vec{α}$ του σώματος, η οποία έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της τροχιάς.

Δηλαδή:

$$α^2 = α_κ^2 + α_ε^2 \qquad (1.28)$$

Επομένως κατά την δυναμική μελέτη της καμπυλόγραμμης κίνησης ενός σώματος, αφού σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, τις αναλύουμε σε δύο κάθετους άξονες, έναν ακτινικό άξονα (κ) και έναν εφαπτομενικό άξονα (ε) και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2^{o} νόμο του Newton σε κάθε άξονα:

$$\sum \vec{F}_{\kappa} = m.\vec{\alpha}_{\kappa} \quad \text{και} \quad \sum \vec{F}_{\varepsilon} = m.\vec{\alpha}_{\varepsilon} \qquad (1.29)$$



Σχήμα 1.13