

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ - ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Α. ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Όταν ένα σύνολο από σώματα οριστεί ότι αποτελεί σύστημα σωμάτων, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος διακρίνονται σε:

Εσωτερικές, όταν ασκούνται από σώματα του συστήματος σε άλλα σώματα του συστήματος.

Εξωτερικές, όταν ασκούνται από σώματα εκτός του συστήματος σε σώματα του συστήματος.

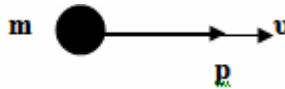
Αφού οι δυνάμεις στην φύση εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη, σε ένα σύστημα σωμάτων, οι εσωτερικές δυνάμεις θα εξουδετερώνονται.

Όταν στο σύστημα σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν το σύστημα ονομάζεται **μονωμένο**.

Β. ΟΡΜΗ

Ορμή υλικού σημείου, ονομάζεται το διανυσματικό φυσικό μέγεθος του οποίου το μέτρο είναι ανάλογο της μάζας και του μέτρου της ταχύτητας του υλικού σημείου και η κατεύθυνσή του είναι ίδια με αυτήν της ταχύτητας (Σχήμα 2.1).

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.1

Στο S.I. η ορμή έχει μονάδα μέτρησης 1 kg.m/s

Ορμή συστήματος σωματίων, ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των ορμών κάθε σώματος (υλικού σημείου).

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \quad (2.2)$$

Γ. Η ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

1. Γενίκευση του 2^{ου} Νόμου του Newton

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Η κατεύθυνση του $\Delta \vec{p}$ είναι ίδια με την κατεύθυνση του $\sum \vec{F}$.

Πράγματι:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Για ένα σύστημα σωμάτων μας ενδιαφέρει η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων μόνο, αφού η εσωτερικές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται, οπότε θα ισχύει αντίστοιχα:

$$\sum \mathbf{F}_{E\Xi} = \frac{\Delta \vec{p}_{O\Lambda}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

δηλαδή η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ολικής ορμής του συστήματος.

2. Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Όταν σε ένα σώμα η συνιστάμενη δύναμη είναι ίση με μηδέν τότε η συνολική ορμή του σώματος παραμένει σταθερή.

Πράγματι:

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta \vec{p} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \text{σταθερή}$$

Δηλαδή:

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{APX} = \vec{p}_{TE\Lambda} \quad (2.5)$$

Ομοίως όταν ένα σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο, αφού η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν τότε και η ολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή αφού:

$$\sum \vec{F}_{E\Xi} = \frac{\Delta \vec{p}_{O\Lambda}}{\Delta t} = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_{O\Lambda} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{O\Lambda} = \text{σταθερή}$$

Δηλαδή για **μονωμένο σύστημα:**

$$\vec{p}_{APXO\Lambda} = \vec{p}_{TE\Lambda O\Lambda} \quad (2.6)$$

Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε το παραπάνω είναι ότι σε **μονωμένο σύστημα σωμάτων**, όταν δηλαδή σε ένα σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις, τότε προφανώς για δύο σώματα του συστήματος με μάζες m_1 και m_2 που αλληλεπιδρούν θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -\vec{F}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow \\ \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} &= -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \Leftrightarrow \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Delta \vec{p}_{O\Lambda} &= 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{σταθερή} \Leftrightarrow \vec{p}_{APXO\Lambda} = \vec{p}_{TE\Lambda O\Lambda} \end{aligned}$$

Τα παραπάνω αποτελούν την **αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.)**.

Δ. ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Δ1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Κρούσεις ονομάζονται τα φαινόμενα κατά τα οποία μεταξύ δύο ή περισσότερων σωμάτων αναπτύσσονται δυνάμεις πολύ ισχυρές για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, ακόμα και αν τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή, επίσης π.χ. συμβαίνει με τα σώματα α όταν εκτοξεύονται εναντίον ακίνητων πυρήνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

1. Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.) ακόμα και αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι μηδέν, διότι ο χρόνος κρούσης των σωμάτων είναι τόσο μικρός, ώστε οι εξωτερικές δυνάμεις δεν προλαβαίνουν να μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος, αφού από την γενίκευση του θεμελιώδη νόμου επίσης μηχανικής σε ένα σύστημα σωμάτων γνωρίζουμε:

$$\sum \vec{F}_{εξ} = \frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_{ολ} = \sum \vec{F}_{εξ} \cdot \Delta t$$

Άρα αν $\Delta t \rightarrow 0$ τότε $\Delta p_{ολ} \rightarrow 0$, δηλαδή η μεταβολή της ολικής ορμής των σωμάτων είναι περίπου μηδέν και επομένως **$p_{ολ} = \text{σταθερό}$** .

2. Επειδή οι κρούσεις είναι στιγμιαία φαινόμενα, τα σώματα που συγκρούονται αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση έχουν την ίδια θέση δηλαδή έχουν την ίδια βαρυτική δυναμική ενέργεια. Επομένως:

$$\Delta E = E_{ΤΕΛ} - E_{ΑΡΧ} = (K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ}) - (K_{ΑΡΧ} + U_{ΑΡΧ}) = K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} - U_{ΑΡΧ}$$

Όπως όμως είδαμε:

$$U_{ΑΡΧ} = U_{ΤΕΛ} \text{ οπότε τελικά:}$$

$$\Delta E = K_{ΤΕΛ} - K_{ΑΡΧ} = \Delta K \quad (2.7)$$

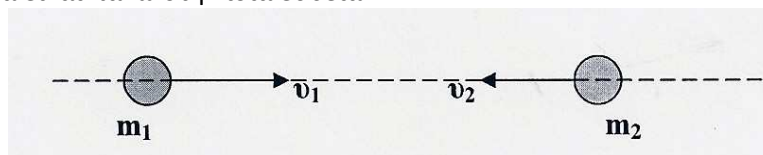
δηλαδή αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση η μεταβολή της ολικής ενέργειας ισούται με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Η μεταβολή αυτή της ενέργειας είναι συνήθως κατά απόλυτη τιμή ίση με την εκλυόμενη ενέργεια κατά την διάρκεια της κρούσης (εκλύεται ενέργεια με την μορφή θερμότητας).

Δ.2 ΕΙΔΗ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

Α. ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΙΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ

1. Κεντρική ή μετωπική κρούση:

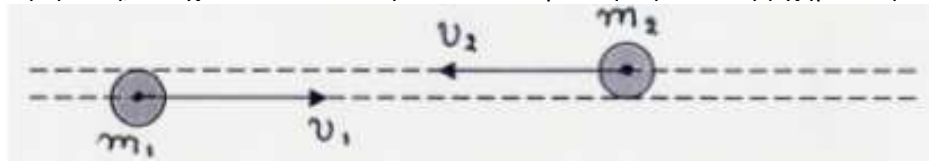
Ονομάζεται η κρούση όταν τα σώματα πριν την κρούση, έχουν τις διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας τους πάνω στην ίδια ευθεία (Σχήμα 2.2). Μάλιστα αν τα συγκρούμενα σώματα είναι σφαίρες οι ταχύτητες των κέντρων μάζας πριν αλλά και μετά την κρούση θα είναι πάνω στην ίδια ευθεία.



Σχήμα 2.2

2. Έκκεντρη κρούση:

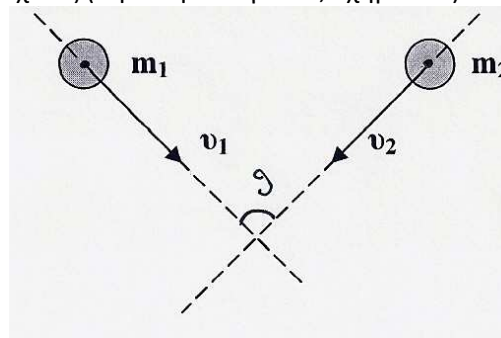
Ονομάζεται η κρούση όταν τα σώματα πριν την κρούση έχουν ταχύτητες των κέντρων μάζας τους, να έχουν διευθύνσεις πάνω σε παράλληλες ευθείες (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 2.3

3. Πλάγια κρούση:

Ονομάζεται η κρούση όταν τα κέντρα μάζας των σωμάτων πριν την κρούση έχουν ταχύτητες με διευθύνσεις τυχαίες (δηλαδή υπό γωνία, Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4

B. ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΟΥΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ

1. Ελαστικές:

Ονομάζονται οι κρούσεις κατά τις οποίες διατηρείται η ολική μηχανική ενέργεια (άρα και η ολική κινητική ενέργεια, αφού ήδη έχουμε αναφέρει ότι κατά την διάρκεια κάθε κρούσης η ολική βαρυτική δυναμική ενέργεια δεν μεταβάλλεται). Δηλαδή στις ελαστικές κρούσεις:

$$\Delta E_{ΟΛ} = \Delta K_{ΟΛ} \Leftrightarrow K_{ΟΛαρχ} = K_{ΟΛτελ} \quad (2.8)$$

ή

$$|\Delta K_1| = |\Delta K_2| \quad \text{ή} \quad \Delta K_1 = -\Delta K_2 \quad \text{αφού} \quad \Delta K_{ΟΛ} = 0 \quad (2.8)$$

2. Ανελαστικές:

Ονομάζονται οι κρούσεις κατά τις οποίες η ολική μηχανική ενέργεια (άρα και η ολική κινητική ενέργεια) μειώνονται. Η απόλυτη τιμή της μεταβολής της ενέργειας ισούται (συνήθως) με την εκλυόμενη θερμότητα κατά την διάρκεια επίσης κρούσης. Δηλαδή στις ανελαστικές κρούσεις:

$$Q = |\Delta E_{ΟΛ}| = |\Delta K_{ΟΛ}| \Leftrightarrow Q = |K_{ΟΛτελ} - K_{ΟΛαρχ}| \quad (2.9)$$

Ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης, είναι η **πλαστική κρούση**, στην οποία τα σώματα που συγκρούονται συσσωματώνονται και κινούνται ενιαία σαν ένα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Το ποσοστό μείωσης επίσης μηχανικής ενέργειας σε μία κρούση δίνεται από την σχέση:

$$\alpha\% = \frac{\Delta K_{ΟΛ}}{K_{ΟΛαρχ}} \cdot 100 \quad (2.10)$$

Δ3 (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ). ΜΕΤΩΠΙΚΗ (ΚΕΝΤΡΙΚΗ) ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΦΑΙΡΩΝ**

Σε μια κρούση ισχύει πάντα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.). Αν συγκρουστούν μετωπικά και ελαστικά δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 και ταχύτητες των κέντρων μάζας τους v_1 και v_2 αντίστοιχα και μετά την κρούση οι ταχύτητες των κέντρων μάζας τους είναι αντίστοιχα v_1' και v_2' (όλες οι ταχύτητες θα είναι βέβαια συγγραμμικές), τότε με εφαρμογή επίσης Α.Δ.Ο. θα έχουμε:

$$\vec{P}_{ΟΛαρχ} = \vec{P}_{ΟΛτελ} \Leftrightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \Leftrightarrow m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2) \quad (2.11)$$

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της κινητικής ενέργειας (Α.Δ.Κ.Ε.) (στην ελαστική κρούση) θα έχουμε:

$$K_{ΟΛαρχ} = K_{ΟΛτελ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 \Leftrightarrow m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2) \Leftrightarrow m_1 \cdot (v_1 - v_1') \cdot (v_1 + v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2) \cdot (v_2' + v_2) \quad (2.12)$$

Διαιρώντας επίσης σχέσεις (2.11) και (2.12) κατά μέλη θα έχουμε:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad (2.13)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2.11) και (2.13) θα έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \quad (2.14)$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad (2.15)$$

Να τονίσουμε ότι σε όλη την διαδικασία έχουμε θεωρήσει ότι οι ταχύτητες κάποιας συγκεκριμένης φοράς είναι θετικές και της αντίθετης φοράς αρνητικές (π.χ. προς τα δεξιά θετικές και προς τα αριστερά αρνητικές).

A. ΑΝ ΟΙ ΣΦΑΙΡΕΣ ΕΧΟΥΝ ΙΣΕΣ ΜΑΖΕΣ:

Αν $m_1 = m_2 = m$ τότε οι σχέσεις (2.14) και (2.15) δίνουν:

$$v_1' = v_2 \text{ και } v_2' = v_1$$

δηλαδή τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

B. ΑΝ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΩΜΑ ΕΠΙΣΗΣ ΑΡΧΙΚΑ ΑΚΙΝΗΤΟ ($v_2=0$):

Τότε οι σχέσεις (2.14) και (2.15) θα δίνουν αντίστοιχα:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad (2.16)$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad (2.17)$$

1. Αν τα σώματα έχουν αρχικά ίσες μάζες δηλαδή $m_1 = m_2 = m$, τότε όπως ήδη έχουμε δει τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες δηλαδή: $v_1' = 0$ και $v_2' = v_1$

2. Αν η κινούμενη μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη ($m_1 \gg m_2$),

τότε $m_1 + m_2 \approx m_1$ και $m_1 - m_2 \approx m_1$, οπότε οι σχέσεις (2.16) και (2.17) αντίστοιχα θα είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \approx \frac{m_1}{m_1} \cdot v_1 \Leftrightarrow v_1' = v_1 \quad (2.18)$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \approx \frac{2 \cdot m_1}{m_1} \cdot v_1 \Leftrightarrow v_2' = 2 \cdot v_1 \quad (2.19)$$

δηλαδή η κινούμενη μάζα διατηρεί την ταχύτητά επίσης και η ακίνητη εκτινάσσεται με διπλάσια ταχύτητα.

3. Αν η ακίνητη μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη ($m_1 \ll m_2$),

τότε $m_1 + m_2 \approx m_2$ και $m_1 - m_2 \approx -m_2$ και $m_1/m_2 \approx 0$, οπότε οι σχέσεις (2.16) και (2.17) αντίστοιχα θα είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \approx \frac{-m_2}{m_1} \cdot v_1 \Leftrightarrow v_1' = -v_1 \quad (2.20)$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \approx \frac{2 \cdot m_1}{m_2} \cdot v_1 \Leftrightarrow v_2' = 0 \quad (2.21)$$

δηλαδή η κινούμενη μάζα αποκτά αντίθετη ταχύτητα ενώ η ακίνητη συνεχίζει να ακινητεί.

Σημείωση:

Να υπολογίσετε το ποσοστό επίσης κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο, στην περίπτωση επίσης κεντρικής ελαστικής κρούσεις μιας σφαίρας μάζας m_1 με μια αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 :

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από την κινούμενη σφαίρα m_1 στην ακίνητη σφαίρα m_2 θα είναι:

$$\alpha\% = \frac{|\Delta K_1|}{K_{10\lambda}} \cdot 100\% = \frac{|\Delta K_2|}{K_{10\lambda}} \cdot 100\% \Leftrightarrow \alpha\% = \frac{\left| \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 - 0 \right|}{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2} \cdot 100\% \quad (\text{αφού } |\Delta K_1| = |\Delta K_2|)$$

Με χρήση επίσης σχέσης 2.17 (δηλαδή $v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$), η παραπάνω σχέση

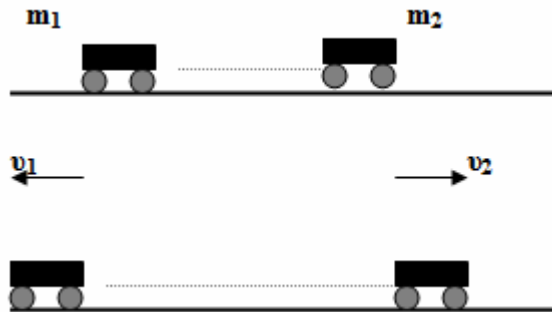
γίνεται:

$$\alpha\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{4 \cdot m_1^2 \cdot v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}}{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2} \cdot 100\% \Leftrightarrow \alpha\% = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \quad (2.22)$$

Παρατηρούμε ότι το ποσοστό επίσης κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο, στην περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσεις μιας σφαίρας μάζας m_1 με μια αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας που έχει το αρχικά κινούμενο σώμα και εξαρτάται μόνο από την σχέση των μαζών που έχουν οι σφαίρες που συγκρούονται.

Ε. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Ας θεωρήσουμε το σύστημα ενός αβαρούς ιδανικού ελατηρίου που στα άκρα έχει δύο αμαξίδια με μάζες m_1 και m_2 τα οποία μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο, όταν το ελατήριο αφηθεί ελεύθερο όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5

Από εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής για το σύστημα έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ΑΡΧ}} = \vec{p}_{\text{ΤΕΛ}} \Leftrightarrow 0 + 0 = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} \quad (2.23)$$

Τα παραπάνω εφαρμόζονται και σε άλλες ανάλογες περιπτώσεις όπως π.χ. εκρήξεις βομβών κ.λ.π. και δείχνουν ότι τα σώματα με μικρότερη μάζα αποκτούν μεγαλύτερη ταχύτητα.

Επίσης με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής ερμηνεύονται πληθώρα άλλων φαινομένων, όπως η προώθηση πυραύλου, η ανάκρουση του όπλου κ.λ.π.