

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.1

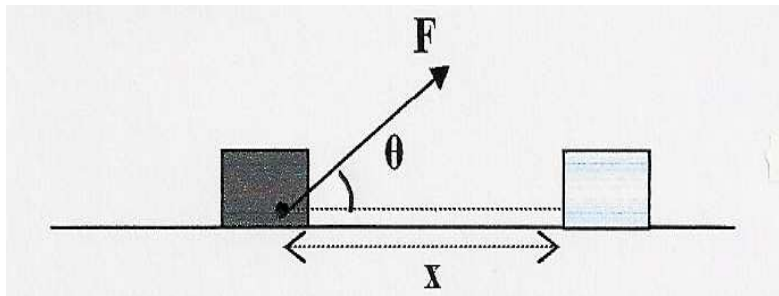
### ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

#### 1. ΕΡΓΟ

*Το έργο σαν φυσικό μέγεθος εκφράζει την μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα σε ένα άλλο ή την μετατροπή της από μια μορφή σε μια άλλη.*

Το έργο είναι μονόμετρο φυσικό μέγεθος όπως και η ενέργεια.

##### **1.1. ΕΡΓΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:**



Σχήμα 1

Όταν σε ένα σώμα ασκείται δύναμη σταθερού μέτρου  $F$  και σταθερής κατεύθυνσης, που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της σε ευθεία τροχιά κατά  $\Delta x$ , τότε η δύναμη παράγει έργο που η τιμή του δίνεται από την σχέση:

$$W = F \cdot \Delta x \cdot \cos\theta \quad (1)$$

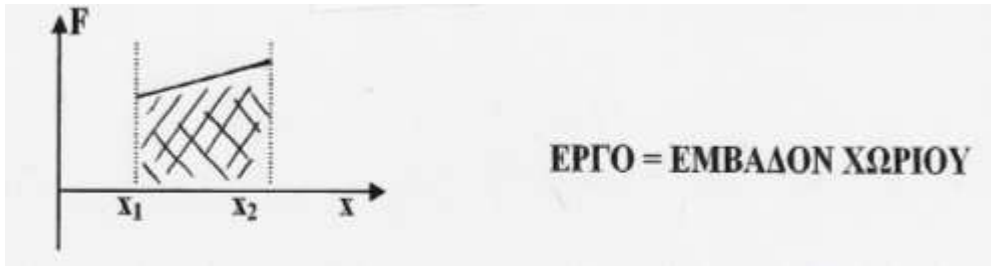
όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης της  $\vec{F}$  και της μετατόπισης  $\Delta \vec{x}$ . Στο S.I. το έργο μετριέται σε Joule όπου  $1 \text{ Joule} = 1 \text{ N.m}$ .

##### **Διερεύνηση:**

- i) Αν η δύναμη είναι ομόρροπη με την μετατόπιση τότε  $\theta = 0^\circ$  και αφού  $\cos 0^\circ = 1$  τότε  $W = F \cdot \Delta x$
- ii) Αν η δύναμη είναι αντίρροπη με την μετατόπιση (π.χ. τριβή) τότε  $\theta = 180^\circ$  και αφού  $\cos 180^\circ = -1$  τότε  $W = -F \cdot \Delta x$
- iii) Αν η δύναμη είναι κάθετη στην μετατόπιση (π.χ. κάθετη αντίδραση  $N$ ) τότε  $\theta = 90^\circ$  και αφού  $\cos 90^\circ = 0$  τότε  $W = 0$ . Δηλαδή δύναμη κάθετη στην μετατόπιση δεν παράγει έργο.

##### **1.2. ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:**

Όταν σε ένα σώμα ασκείται δύναμη μεταβλητού μέτρου στην κατεύθυνση της κίνησης (δηλαδή παράλληλα με την μετατόπιση του σώματος), τότε το έργο της δύναμης είναι αριθμητικά ίσο σε διάγραμμα "δύναμης-θέσης", με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση, τον άξονα των θέσεων και δύο ευθείες κάθετες στον άξονα των θέσεων που προσδιορίζουν την αρχική και τελική θέση (βλέπε σχήμα 2 που ακολουθεί).

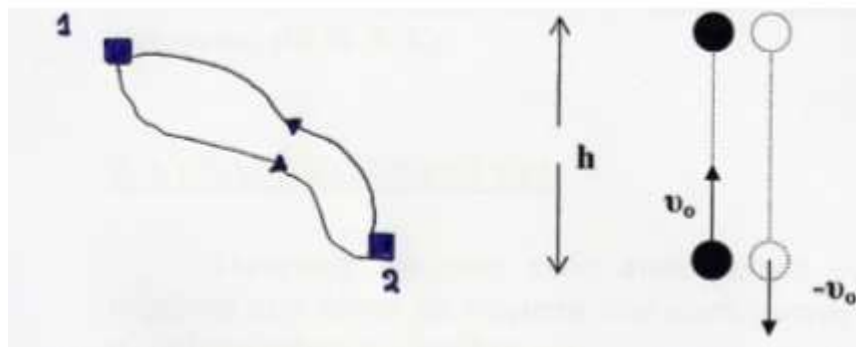


Σχήμα 2

## 2. ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Αν ένα σώμα μάζας  $m$  μετακινείται από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Γ που απέχουν κατακόρυφα απόσταση  $h$ , όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα τότε το βάρος του παράγει έργο:

$$W = m \cdot g \cdot h \quad (2)$$



Σχήμα 3

Το έργο του βάρους κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι ίσο με μηδέν. Πράγματι:

$$W_{W(1 \rightarrow 2)} = m \cdot g \cdot h \quad \text{και} \quad W_{W(2 \rightarrow 1)} = -m \cdot g \cdot h \quad \text{οπότε} \quad W_{W(O \Lambda)} = 0$$

### Σημείωση:

1. Στην σχέση (2) το έργο του βάρους όταν το σώμα ανεβαίνει είναι αρνητικό:

$$W = -m \cdot g \cdot h$$

2. Όταν το έργο είναι θετικό ονομάζεται **παραγόμενο** και όταν είναι αρνητικό ονομάζεται **καταναλισκόμενο**.

### Γενικότερα:

Δυνάμεις που το έργο τους κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι ίσο με μηδέν ονομάζονται **συντηρητικές** ή **διατηρητικές**. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι **συντηρητικές** δυνάμεις είναι οι δυνάμεις που το έργο τους δεν εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθεί το σώμα στο οποίο ασκούνται, αλλά μόνο από την αρχική και τελική του θέση.

Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων εκτός από το βάρος, είναι οι δυνάμεις των ελατηρίων, οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις κ.λ.π.

### 3. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Μ.Κ.Ε.) ή ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Ε.Ε.)

Έστω σώμα μάζας  $m$  που αφήνεται να πέσει στο έδαφος από ύψος  $h$ , κάνοντας ελεύθερη πτώση. Ισχύει για το έργο του βάρους όπως είδαμε:

$$W = m \cdot g \cdot h \quad (2)$$

ενώ από τους τύπους της ελεύθερης πτώσης έχω:

$$h = (1/2)g \cdot t^2 \quad (3)$$

$$u = g \cdot t \quad (4)$$

Άρα από (2) μέσω της (3) έχω:

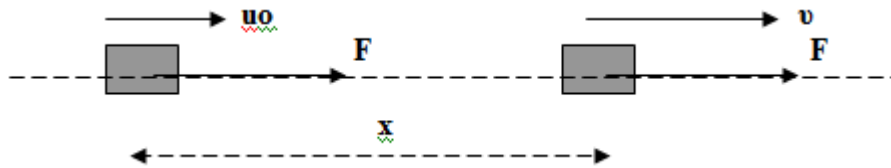
$$W = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot t^2 \Rightarrow (3) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 = \Delta K \quad (5)$$

Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε ότι:

**Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.** Δηλαδή:

$$\Delta K = K_{\text{ΤΕΛ}} - K_{\text{ΑΡΧ}} = W_{\text{ΟΛ}} \quad (6)$$

Τα παραπάνω εκφράζουν το **θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)**.



Σχήμα 4

Ένας γενικότερος τρόπος να αποδείξουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, είναι ο ακόλουθος. Ας θεωρήσουμε (Σχήμα 4) σώμα μάζας  $m$  το οποίο δέχεται σταθερή δύναμη  $\vec{F}$ , η οποία το μετατοπίζει παράλληλα στην διεύθυνσή της κατά την φορά της.

Εφαρμόζοντας τον 2<sup>ο</sup> Νόμο του Newton θα έχουμε:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (7)$$

Επίσης αφού το σώμα δέχεται σταθερή δύναμη θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$u = u_0 + a \cdot t \quad (8) \quad \text{και}$$

$$x = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (9)$$

Λύνοντας την σχέση (8) ως προς χρόνο και αντικαθιστώντας στην σχέση (9) θα έχουμε:

$$t = \frac{u - u_0}{a} \quad \text{και έτσι}$$

$$x = u_0 \cdot \frac{u - u_0}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{u - u_0}{a}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{u_0 \cdot u - u_0^2}{a} + \frac{u^2 + u_0^2 - 2 \cdot u \cdot u_0}{2 \cdot a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{u^2 - u_0^2}{2 \cdot a} \quad (10)$$

Το έργο της δύναμης  $\vec{F}$  μέσω των σχέσεων (7) και (10) θα είναι:

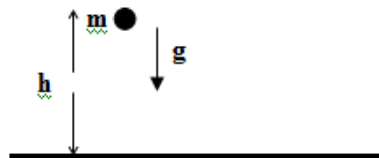
$$W = F \cdot x \Leftrightarrow W = m \cdot a \cdot \frac{u^2 - u_0^2}{2 \cdot a} \Leftrightarrow W = \frac{m \cdot u^2}{2} - \frac{m \cdot u_0^2}{2} \Leftrightarrow W = K_{\text{TEΛ}} - K_{\text{APX}}$$

ή γενικεύοντας θα έχουμε:

$$\sum W = K_{\text{TEΛ}} - K_{\text{APX}} \quad (11)$$

#### 4. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

*Δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων ονομάζεται η ενέργεια που έχουν τα σώματα του συστήματος λόγω των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων (δυνάμεων).*



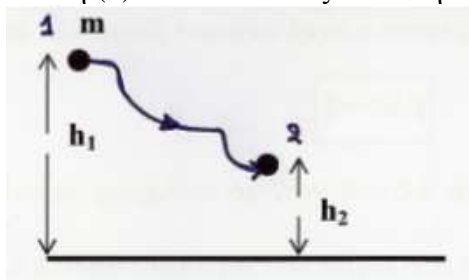
Σχήμα 5

Για ένα σώμα μάζας  $m$  που βρίσκεται σε ύψος  $h$  πάνω από την επιφάνεια της Γης, ονομάζουμε δυναμική ενέργεια την ενέργεια που έχει το σώμα λόγω της θέσης του και η οποία είναι ίση με:

$$U = m \cdot g \cdot h \quad (12)$$

Να σημειώσουμε βέβαια ότι μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε επίπεδο ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και να μετράμε το ύψος  $h$  από το επίπεδο αυτό.

Έστω τώρα σώμα μάζας  $m$  που μετακινείται όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα από θέση (1) σε θέση (2) ακολουθώντας οποιαδήποτε πορεία.



Σχήμα 6

Ισχύει ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας από την θέση (1) στην θέση (2) είναι:

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1 = m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = -m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = -W_{W(2 \rightarrow 1)} \Rightarrow$$

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -W_{W(2 \rightarrow 1)} \quad (13)$$

Τα παραπάνω ισχύουν γενικά για συντηρητικά πεδία δυνάμεων. Δηλαδή:

*Σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων, το έργο της δύναμης του πεδίου ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.*

### 5. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Α.Δ.Μ.Ε.)

*Μηχανική ενέργεια (E) ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων ονομάζεται το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του σώματος ή του συστήματος σωμάτων.*

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα σώμα (όπως αυτό του προηγούμενου παραδείγματος) ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος). Τότε με βάση τις σχέσεις (5) και (13) θα έχω:

$$\Delta K = W_B = -\Delta U \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta(K+U) = 0 \Leftrightarrow \Delta E = 0 \Leftrightarrow$$

$$E = \text{ΣΤΑΘΕΡΟ} \quad \text{ή} \quad K_{\text{ΑΡΧ}} + U_{\text{ΑΡΧ}} = K_{\text{ΤΕΛ}} + U_{\text{ΤΕΛ}} \quad (14)$$

*Όταν σε ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, τότε η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος ή του συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερή. (Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας-Α.Δ.Μ.Ε.)*

### 6. ΙΣΧΥΣ

*Η ισχύς ενός κινητήρα και γενικότερα οποιασδήποτε μηχανής είναι το πηλίκο του έργου που παράγει ο κινητήρας, προς το χρονικό διάστημα στο οποίο αυτό παράγεται, δηλαδή η ισχύς εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο παράγει έργο ο κινητήρας. Δηλαδή:*

$$P = W/t \quad (15)$$

Η ισχύς μετριέται σε Watt στο S.I. όπου 1 Watt = 1 Joule/sec.

Αν μιλάμε τώρα για ένα σώμα στο οποίο ασκείται δύναμη μέτρου F στην κατεύθυνση της κίνησης του σώματος προσφέροντάς του ενέργεια, τότε η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F είναι:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot v \Leftrightarrow P = F \cdot v \quad (16)$$

**Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας:**

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\sum \Delta W}{\Delta t} = \frac{\sum F \cdot \Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = \sum F \cdot v \quad (17)$$

**Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας:**

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta W_w}{\Delta t} = -P_w \quad (18)$$

Επομένως:

- Για κατακόρυφη κίνηση:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \pm m \cdot g \cdot v \quad (+ \text{ αν το σώμα ανεβαίνει και } - \text{ αν το σώμα κατεβαίνει})$$

- Για κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \pm m \cdot g \cdot \eta \mu \theta \cdot v \quad (+ \text{ αν το σώμα ανεβαίνει και } - \text{ αν το σώμα κατεβαίνει})$$